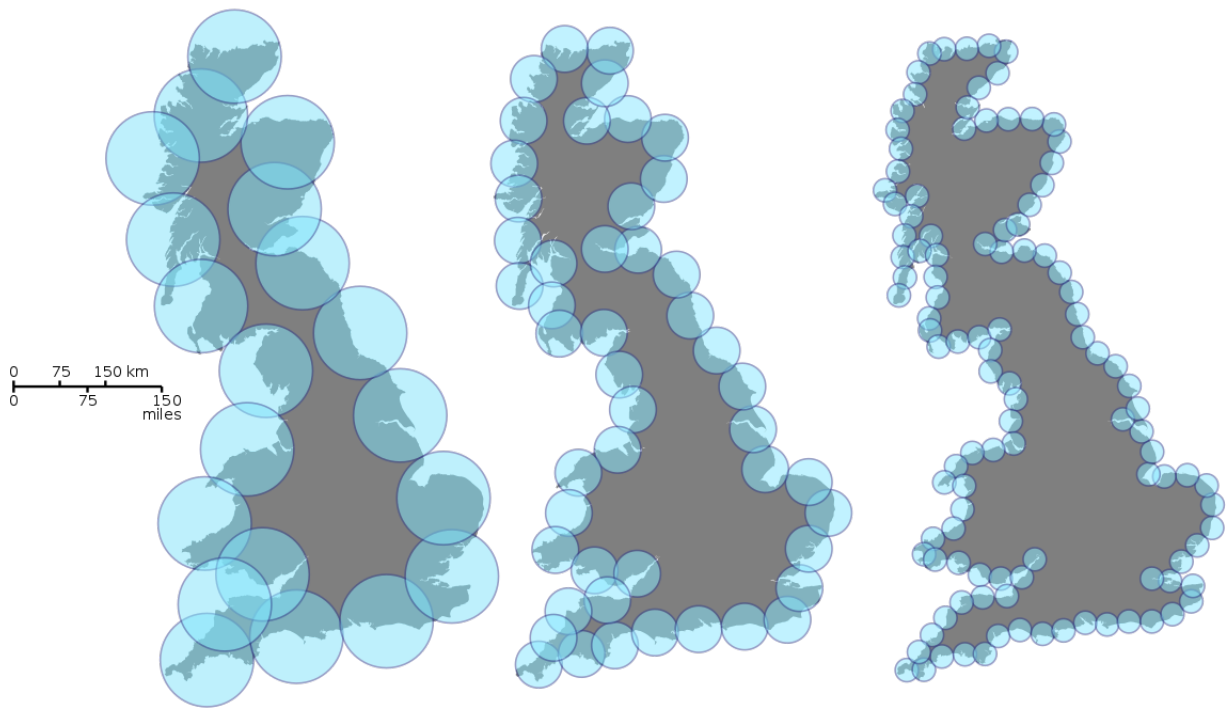


Autour de la dimension de Hausdorff

TER de Master 1 Mathématiques Fondamentales - Université Paris Saclay -
2020/2021



EVE MACHEFERT⁽¹⁾ - GAËTAN DAMY⁽²⁾ - FLORIAN THIRY⁽³⁾

(1). eve.machefert@universite-paris-saclay.fr

(2). gaetan.damy@universite-paris-saclay.fr

(3). florian.thiry@universite-paris-saclay.fr

Avant-propos

Ce document constitue le mémoire d'un projet de plusieurs semaines mené dans le cadre du master 1 de mathématiques d'Orsay. Son but est la découverte et/ou l'approfondissement de notions mathématiques à travers un sujet proche de la recherche en mathématiques, le tout étant encadré par un enseignant-chercheur du département de mathématiques d'Orsay. Sur les traces de notre encadrant, nous nous sommes donc intéressés à la dimension de Hausdorff.

Nous faisons tout d'abord un rappel sur la mesure de Hausdorff ainsi que la dimension de Hausdorff. Puis nous nous intéressons à des résultats de densité pour cette mesure. Ces résultats sont analogues aux résultats de densité bien connus pour la mesure de Lebesgue. Nous allons d'abord avoir besoin d'un théorème de Vitali, que nous prouverons ainsi que quelques autres propriétés, qui nous seront utiles pour étudier, par la suite ces théorèmes de densités. Ensuite nous allons calculer la dimension de Hausdorff du graphe de diverses fonctions. Enfin nous étudierons le comportement de la dimension de Hausdorff vis à vis des *Ensembles de Besicovitch* dont la mesure extérieure de Lebesgue peut être petite voire nulle.

Nous nous sommes largement appuyé sur l'ouvrage de Falconer *The geometry of fractal sets* [2], mais également sur les notes de Hervé de Pajot pour la dernière partie.

Nous remercions tout particulièrement M. Laurent Moonens, enseignant-chercheur à l'université Paris-Saclay, pour son aide et ses conseils précieux durant l'élaboration de ce mémoire.

Notations et conventions

Dans l'entièreté de ce projet, nous adopterons les notations et conventions suivantes :

- On désignera par \mathbb{R} le corps des réels.
- On désignera par \mathbb{N} et \mathbb{Z} respectivement l'ensemble des nombres entiers naturels et celui des nombres entiers relatifs.
- On notera \mathbb{S}^n le cercle unité de \mathbb{R}^{n+1} .
- Étant donné f une fonction à valeurs réelles et un réel a , on notera $\{f < a\}$ respectivement $\{f > a\}$ l'ensemble des points où f est inférieure, respectivement supérieure à a .
- On désignera par $B(x, r)$ la boule de centre x et de rayon $r > 0$.
- On désignera par $B_f(x, r)$ la boule fermée de centre x et de rayon $r > 0$.
- On désignera par $|U|$ le diamètre d'un ensemble U , *i.e.* $|U| := \sup\{\|x - y\| : x, y \in U\}$.
- On désignera par $\text{dist}(x, E)$ la distance de $x \in \mathbb{R}^n$ à l'ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$, *i.e.*
 $\text{dist}(x, E) = \inf_{y \in E} \|x - y\|$.

Table des matières

1	Rappel sur la dimension et la mesure de Hausdorff	3
1.1	Mesure de Hausdorff	3
1.2	Dimension de Hausdorff	4
2	Propriétés de densité	6
2.1	Définitions	6
2.2	Résultats préliminaires	7
2.3	Théorèmes de densité et corollaires	12
3	Dimension de Hausdorff du graphe de diverses fonctions	18
3.1	Cas où f est à variation bornée	18
3.2	Condition de Hölder	21
3.3	Fonctions à fortes oscillations	22
4	Autour de la conjecture deakeya	35
4.1	Prelinaires sur les fonctions maximales	36
4.2	Conjecture de la fonction maximale deakeya	42
4.3	Lien avec la conjecture deakeya	44
4.4	Résolution dans le cas $n = 2$	48

Chapitre 1

Rappel sur la dimension et la mesure de Hausdorff

1.1 Mesure de Hausdorff

Nous allons commencer par introduire la notion de mesure de Hausdorff.

Définition 1.1. (*Mesure de Hausdorff*)

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé X . Soient $s \geq 0$ et $\delta > 0$. On définit une mesure extérieure $\mathcal{H}_\delta^s(A)$ par :

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) := \inf \left\{ \sum_{i \in I} |U_i|^s : A \subset \bigcup_{i \in I} U_i \text{ et } |U_i| \leq \delta \right\},$$

On définit alors la **mesure de Hausdorff** s -dimensionnelle de A par :

$$\mathcal{H}^s(A) := \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\delta^s(A).$$

Remarque 1.1. On peut, dans cette définition, prendre, sans perte de généralité, un recouvrement (U_i) avec U_i convexe. En effet, si un U_i n'est pas convexe on peut alors considérer son enveloppe convexe, dont le diamètre est le même que celui de l'ensemble de départ. Ainsi en remplaçant, les ensembles du recouvrement par leur enveloppe convexe, on obtient un recouvrement de convexe qui vérifie les mêmes propriétés que le recouvrement initiale, vis à vis de la définition que nous considérons.

Nous utiliserons donc, par la suite, notamment dans le chapitre 2, la définition analogue qui considère des recouvrements avec des convexes.

1.2 Dimension de Hausdorff

Il nous reste maintenant à définir la dimension de Hausdorff.

Définition 1.2. (*Dimension de Hausdorff*)

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé X . Il existe un unique réel strictement positif d tel que :

- pour tout $a > d$, on a $\mathcal{H}^a(A) = 0$,
- pour tout $0 \leq b < d$, on a $\mathcal{H}^b(A) = +\infty$.

Ce nombre d est appelé la dimension de Hausdorff de A et on le note $\dim(A)$.

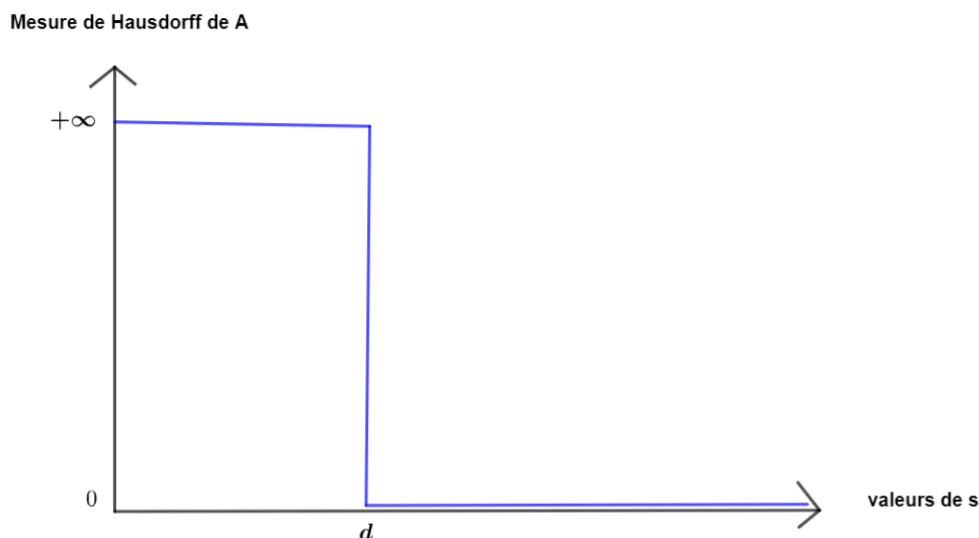


FIGURE 1.1 – Schéma du comportement de la mesure de Hausdorff.

Remarque 1.2. Intuitivement, la mesure de Hausdorff 1-dimensionnelle permet de mesurer « la longueur » d'un objet, la mesure de Hausdorff 2-dimensionnelle « son aire » et la mesure de Hausdorff 3-dimensionnelle sont « volume ». Cependant, certains objets peuvent avoir une dimension de Hausdorff non entière...

Proposition 1.1. Pour $\delta > 0, s \geq 0, A \subset \mathbb{R}^n$ on définit $\tilde{\mathcal{H}}_\delta^s(A)$ de la même façon que $\mathcal{H}_\delta^s(A)$ excepté que l'on considère uniquement les recouvrements par des boules. On pose alors de même $\tilde{\mathcal{H}}^s(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \tilde{\mathcal{H}}_\delta^s(A)$, et on définit ainsi $\tilde{\dim}(A)$.

Alors $\tilde{\dim}(A) = \dim(A)$.

Démonstration. Un recouvrement par des boules est en particulier un recouvrement. Donc $\mathcal{H}^s(A) \leq \tilde{H}^s(A)$. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. Soit $\delta > 0$, posons $(E_j)_{j \geq 0}$ un recouvrement de A par des ouverts de diamètres inférieur à δ . Posons aussi $(B_j)_{j \geq 0}$ tel que $E_j \subset B_j := B(x_j, |E_j|)$. Donc $(B_j)_{j \geq 0}$ est un recouvrement de A par des boules de diamètre inférieur à 2δ . Donc,

$$\tilde{H}_{2\delta}^s(A) \leq \sum_{j \geq 0} |B_j|^s = 2^s \sum_{j \geq 0} |E_j|^s.$$

Cette inégalité étant vraie pour tout recouvrement $(E_j)_{j \geq 0}$ de A par des ouverts de diamètre inférieur à δ , on peut passer l'infimum en δ . Donc $\tilde{\mathcal{H}}^s(A) \leq 2^s \mathcal{H}^s(A)$.

Ainsi,

$$\mathcal{H}^s(A) \leq \tilde{\mathcal{H}}^s(A) \leq 2^s \mathcal{H}^s(A).$$

On conclut à l'égalité des dimensions. □

Chapitre 2

Propriétés de densité

2.1 Définitions

Commençons par introduire les objets sur lesquels nous allons travailler.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On travaille dans \mathbb{R}^n .

Soit $0 \leq s \leq n$.

Définition 2.1. Soit E un sous-ensemble de \mathbb{R}^n .

On dit que E est un **s -espace** s'il est \mathcal{H}^s -mesurable et $0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$.

Définition 2.2. Soient E un s -espace et $x \in \mathbb{R}^n$.

La **densité supérieure** de E au point x est :

$$\overline{D}^s(E, x) = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^s(E \cap B_f(x, r))}{(2r)^s}.$$

De même on définit également :

Définition 2.3. Soient E un s -espace et $x \in \mathbb{R}^n$.

La **densité inférieure** de E au point x est :

$$\underline{D}^s(E, x) = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^s(E \cap B_f(x, r))}{(2r)^s}.$$

Définition 2.4. Soient E un s -espace et $x \in E$.

On dit que x est un point **régulier** de E si $\overline{D}^s(E, x) = \underline{D}^s(E, x) = 1$.

Sinon on dit que x est un point **irrégulier** de E .

Définition 2.5. Soient E un s -espace.

On dit que E est **régulier irrégulier** si pour \mathcal{H}^s -presque tout $x \in E$, x est régulier irrégulier.

Définition 2.6. Soient E un s -espace et $x \in \mathbb{R}^n$.

La **densité convexe supérieure** de E au point x est :

$$\overline{D}_c^s(E, x) = \limsup_{r \rightarrow 0} \left\{ \frac{\mathcal{H}^s(E \cap U)}{|U|^s}, U \text{ convexe tel que } x \in U \text{ et } 0 < |U| \leq r \right\}.$$

2.2 Résultats préliminaires

Avant de démontrer les théorèmes de densité, qui nous intéressent ici, il nous faut établir quelques résultats.

Proposition 2.1. Soient E un s -espace et $x \in \mathbb{R}^n$, on a alors :

$$2^{-s} \overline{D}_c^s(E, x) \leq \overline{D}^s(E, x) \leq \overline{D}_c^s(E, x).$$

Démonstration.

— On remarque que si on a un sous ensemble $V \subset \mathbb{R}^n$ et $x_0 \in V$, alors $V \subset B_f(x_0, |V|)$.

Soit $r > 0$.

Donc, d'après cette remarque, si U est convexe et tel que $x \in U$, $0 < |U| \leq r$, alors $U \subset B_f(x, |U|)$.

Et il vient donc :

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{H}^s(E \cap U)}{|U|^s} &\leq \frac{\mathcal{H}^s(E \cap B_f(x, |U|))}{|U|^s} \\ &= 2^s \frac{\mathcal{H}^s(E \cap B_f(x, |U|))}{(2|U|)^s} \\ &\leq 2^s \sup_{\rho \leq r} \frac{\mathcal{H}^s(E \cap B_f(x, \rho))}{(2\rho)^s}. \end{aligned}$$

Puis, par passage à la borne supérieure, on obtient :

$$\sup \left\{ \frac{\mathcal{H}^s(E \cap U)}{|U|^s} : U \text{ convexe tel que } x \in U \text{ et } 0 < |U| \leq r \right\} \leq 2^s \sup_{\rho \leq r} \frac{\mathcal{H}^s(E \cap B_f(x, \rho))}{(2\rho)^s}.$$

Ainsi, par passage à la limite, il vient :

$$2^{-s} \overline{D}_c^s(E, x) \leq \overline{D}^s(E, x).$$

— On remarque que :

$$B_f(x, r) \in \{U \text{ convexe tel que } x \in U \text{ et } 0 < |U| \leq 2r\}.$$

Donc , par définition de la limite supérieure, on a bien :

$$\overline{D}^s(E, x) \leq \overline{D}_c^s(E, x).$$

□

Lemme 2.1. *Soit E un s -espace.*

1. *Pour tout $r > 0$, $x \mapsto \mathcal{H}^s(E \cap B_f(x, r))$ est une fonction semi-continue supérieurement et donc Borel-mesurable.*
2. *$x \mapsto \overline{D}^s(E, x)$ et $x \mapsto \underline{D}^s(E, x)$ sont des fonctions Borel-mesurables.*

Démonstration.

1. On rappelle une caractérisation de la semi-continuité supérieure.

On dit que f est semi-continue supérieurement si et seulement si $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \{x : f(x) \geq \alpha\}$ est fermé.

Soit $r > 0$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ (ici on peut même prendre $\alpha > 0$ car on sait que $\mathcal{H}^s(E) > 0$).

On pose $O := \{x : \mathcal{H}^s(E \cap B_f(x, r)) < \alpha\}$.

On veut montrer que O est ouvert.

Soit $x \in O$.

On sait que $B_f(x, r + \varepsilon)$ décroît vers $B_f(x, r)$ quand ε décroît vers 0, et comme $\mathcal{H}^s(E) < \infty$, (et donc que pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathcal{H}^s(E \cap B_f(x, r + \varepsilon)) < \infty$), et que donc $E \cap B_f(x, r)$ est l'intersection des $E \cap B_f(x, r + \varepsilon)$, de \mathcal{H}^s -mesures finies, on obtient que $\mathcal{H}^s(E \cap B_f(x, r + \varepsilon))$ décroît vers $\mathcal{H}^s(E \cap B_f(x, r))$.

Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $\mathcal{H}^s(E \cap B_f(x, r + \varepsilon)) < \alpha$ (car $x \in O$ donc $\mathcal{H}^s(E \cap B_f(x, r)) < \alpha$).

Ainsi, si on prend $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $|x - y| \leq \varepsilon$ (i.e. $y \in B_f(x, \varepsilon)$), alors, par inégalité triangulaire, $B_f(y, r) \subset B_f(x, r + \varepsilon)$. Puis, par croissance de la mesure de Hausdorff, $\mathcal{H}^s(E \cap B_f(y, r)) \leq \mathcal{H}^s(E \cap B_f(x, r + \varepsilon)) < \alpha$.

Donc, $y \in O$ i.e. $B_f(x, \varepsilon) \subset O$, d'où O est ouvert.

Puis $\mathbb{R}^n \setminus O$ est fermé i.e., par la caractérisation rappelée, $\mathcal{H}^s(E \cap B_f(x, r))$ est une fonction semi-continue supérieurement de x .

2. On rappelle que dire que f est Borel-mesurable équivaut à dire que : $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \{x : f(x) < \alpha\}$ est un borélien.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, comme précédemment on peut se restreindre à $\alpha > 0$.

Soit $r > 0$.

On veut montrer que $\{x : \underline{D}^s(E, x) < \alpha\}$ est un borélien.

D'après 1., l'ensemble $\{x : \mathcal{H}^s(E \cap B_f(x, r)) < \alpha(2r)^s\}$ est ouvert.

Soit $\rho > 0$.

On pose $F_\rho := \{x : \mathcal{H}^s(E \cap B_f(x, r)) < \alpha(2r)^s \text{ pour un } r < \rho\}$. L'ensemble F_ρ est ouvert, comme union d'ouverts.

On a donc :

$$\begin{aligned} \{x : \underline{D}^s(E, x) < \alpha\} &= \left\{x : \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^s(E \cap B_f(x, r))}{(2r)^s} < \alpha\right\} \\ &= \bigcap_{\rho > 0} F_\rho. \end{aligned}$$

Cette égalité reste vraie si on prend l'intersection sur les $\rho > 0$ rationnels. L'intersection devient alors dénombrable. L'ensemble $\{x : \underline{D}^s(E, x) < \alpha\}$ est donc un G_δ (intersection dénombrable d'ouverts), donc borélien.

D'où, $x \mapsto \underline{D}^s(E, x)$ est Borel-mesurable.

On procède de façon analogue pour montrer que $x \mapsto \overline{D}^s(E, x)$ est aussi Borel-mesurable. □

Nous allons maintenant introduire une notion de recouvrement de Vitali pour la mesure de Hausdorff et un théorème de Vitali, qui va nous être utile par la suite. Il s'agit ici, non pas du théorème de Vitali classique, mais plutôt d'une version intéressante par rapport à notre étude.

Lemme 2.2. *Soit E un ensemble \mathcal{H}^s -mesurable tel que $\mathcal{H}^s(E) < \infty$. Et soit $\varepsilon > 0$.*

Alors il existe $\rho > 0$ (qui ne dépend que de E et ε) tel que pour toute suite de boréliens (U_i) vérifiant, pour tout i , $0 < |U_i| \leq \rho$, on ait :

$$\mathcal{H}^s\left(E \cap \bigcup_i U_i\right) < \sum_i |U_i|^s + \varepsilon.$$

Remarque 2.1. *La démonstration de ce lemme s'appuie sur la définition de la mesure de Hausdorff, comme la limite quand $\delta \rightarrow 0$ de \mathcal{H}_δ^s et la partition de E en $E \setminus \bigcup_i U_i$ et $E \cap \bigcup_i U_i$. Pour plus de détails, voir la démonstration du lemme 1.7 (page 9) dans *The geometry of fractal sets* [2].*

Définition 2.7. *On appelle **recouvrement de Vitali** de E , une famille \mathcal{V} d'ensembles telle que pour tout $x \in E$ et $\delta > 0$, il existe $U \in \mathcal{V}$ tel que $x \in U$ et $0 < |U| \leq \delta$.*

Théorème 2.1. (Théorème de Vitali)

1. *Soit E un sous-ensemble \mathcal{H}^s -mesurable de \mathbb{R}^n et soit \mathcal{V} un recouvrement de Vitali (de fermés) de E .*

Alors il existe une suite finie ou dénombrable d'ensembles disjoints (U_i) de \mathcal{V} telle qu'on ait soit $\sum_i |U_i|^s = \infty$ soit $\mathcal{H}^s(E \setminus \bigcup_i U_i) = 0$.

2. Si de plus $\mathcal{H}^s(E) < \infty$, alors pour $\varepsilon > 0$ fixé, on a également :

$$\mathcal{H}^s(E) \leq \sum_i |U_i|^s + \varepsilon.$$

Démonstration.

1. Soit $\rho > 0$.

On peut supposer que $|U| \leq \rho, \forall U \in \mathcal{V}$.

On fait un raisonnement par induction pour trouver la suite des (U_i) .

Soit $U_1 \in \mathcal{V}$ quelconque.

On suppose avoir choisi $U_1, \dots, U_m \in \mathcal{V}$.

On note $d_m = \sup\{|U| : U \in \mathcal{V} \text{ tel qu'il vérifie } U \cap U_i = \emptyset, \forall 1 \leq i \leq m\}$.

— Si $d_m = 0$ alors, comme par définition d'un recouvrement de Vitali, $\forall U \in \mathcal{V}, |U| > 0$, il vient : $\{|U| : U \in \mathcal{V} \text{ tel que } U \cap U_i = \emptyset, \forall 1 \leq i \leq m\} = \emptyset$. Donc pour tout $U \in \mathcal{V}$, il existe $1 \leq i \leq m$ tel que $U \cap U_i \neq \emptyset$.

Soit $x \in E$.

Soit $k \in \mathbb{N}$, on pose $\delta := 2^{-k} > 0$.

Alors, il existe un $U \in \mathcal{V}$ tel que $x \in U$ et $0 < |U| \leq \delta$ (U dépend donc de k).

Ainsi, par ce qui précède, il existe $1 \leq i_k \leq m$ tel que $U \cap U_{i_k} \neq \emptyset$. Il existe donc $x_k \in U \cap U_{i_k}$, et alors $|x - x_k| \leq 2^{-k}$ (car x et x_k appartiennent à U , qui vérifie $|U| \leq \delta = 2^{-k}$).

On choisit alors $1 \leq i \leq m$ tel que $\{k \in \mathbb{N} : i_k = i\}$ soit infini. On numérote alors ces indices $\{k_l, l \in \mathbb{N}\}$. Et ainsi, on obtient $x_{k_l} \xrightarrow[l \rightarrow +\infty]{} x$ (car $k_l \xrightarrow[l \rightarrow +\infty]{} +\infty$, et cela vient du fait qu'on a pris l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} : i_k = i\}$ infini). Or, pour tout $l \in \mathbb{N}$, on a $x_{k_l} \in U_i$ (par définition des k_l). Donc par fermeture de U_i , il vient finalement $x \in U_i$.

D'où $E \subset \bigcup_{i=1}^m U_i$.

Donc $E \setminus \bigcup_{i=1}^m U_i = \emptyset$.

On obtient donc bien $\mathcal{H}^s(E \setminus \bigcup_{i=1}^m U_i) = 0$. Et on a une suite finie donc la somme $\sum_{i=1}^m |U_i|^s$ est bien finie.

— Sinon, on prend $U_{m+1} \in \mathcal{V}$ un ensemble disjoint de $\bigcup_{i=1}^m U_i$ tel que $|U_{m+1}| \geq \frac{1}{2}d_m > 0$.

Si le processus continue indéfiniment (*i.e.* on a jamais $d_m = 0$), on suppose

$$\sum |U_i|^s < \infty.$$

On veut maintenant montrer que, dans ce cas, $\mathcal{H}^s(E \setminus \bigcup_i U_i) = 0$.

On pose, $\forall i, B_i = B_f(x_i, 3|U_i|)$, avec $x_i \in U_i$ choisi arbitrairement.

On va tout d'abord montrer que $\forall k > 1$:

$$E \setminus \bigcup_{i=1}^k U_i \subset \bigcup_{i=k+1}^{\infty} B_i.$$

Si $x \in E \setminus \bigcup_{i=1}^k U_i$, alors il existe $U \in \mathcal{V}$ tel que $U \cap U_i = \emptyset, \forall 1 \leq i \leq k$ et $x \in U$ (car \mathcal{V}

est un recouvrement de Vitali et car $d_m > 0$). Comme $|U_i| \rightarrow 0$ (car $\sum |U_i|^s < \infty$), on obtient pour un m assez grand, $|U| > 2|U_m|$.

Or, par hypothèse, le processus de sélection des U_i continue indéfiniment, donc il existe $k < j < m$ tel que $U \cap U_j \neq \emptyset$ (car si $\forall 1 \leq j \leq m-1, U \cap U_j = \emptyset$, on aurait $|U| \leq d_{m-1} \leq 2|U_m|$, ce qui est contradictoire avec ce que l'on vient de voir sur U donc on a forcément $j < k$). Et alors $|U| \leq \sup\{|V| : V \in \mathcal{V} \text{ tel que } V \cap U_i = \emptyset, \forall 1 \leq i \leq j-1\} = d_{j-1} \leq 2|U_j|$.

Alors, il existe $y_j \in U_j \cap U$, donc pour $x \in U$ on a

$$\begin{aligned} d(x, x_j) &\leq d(x, y_j) + d(y_j, x_j) \\ &\leq |U| + |U_j| \\ &\leq 2|U_j| + |U_j| \\ &\leq 3|U_j|. \end{aligned}$$

Ainsi $x \in B_j$, d'où $B_j = B_f(x_j, 3|U_j|) \supset U$.

D'où l'inclusion souhaitée.

Donc pour $\delta > 0$ et k assez grand pour que $|B_i| \leq \delta, \forall i > k$,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\delta^s \left(E \setminus \bigcup_{i=1}^\infty U_i \right) &\leq \mathcal{H}_\delta^s \left(E \setminus \bigcup_{i=1}^k U_i \right) \\ &\leq \mathcal{H}_\delta^s \left(\bigcup_{i=k+1}^\infty B_i \right) \\ &\leq \sum_{i=k+1}^\infty |B_i|^s \\ &= 6^s \sum_{i=k+1}^\infty |U_i|^s. \end{aligned}$$

Or, par hypothèse la série est convergente, donc la somme des reste $\sum_{i=k+1}^\infty |U_i|^s$ tend vers 0 quand $k \rightarrow +\infty$.

Donc : pour tout $\delta > 0$ $\mathcal{H}_\delta^s \left(E \setminus \bigcup U_i \right) = 0$.

Et ainsi on trouve bien $\mathcal{H}^s \left(E \setminus \bigcup U_i \right) = 0$.

On a alors montré le premier point du théorème.

2. On prend le ρ correspondant à ε dans le lemme 2.2.

Si $\sum |U_i|^s = \infty$ alors il n'y a rien à faire.

Sinon, par le 1. et le lemme 2.2 on obtient :

$$\mathcal{H}^s(E) = \mathcal{H}^s \left(E \setminus \bigcup U_i \right) + \mathcal{H}^s \left(E \cap \bigcup U_i \right) \leq \sum |U_i|^s + \varepsilon.$$

□

2.3 Théorèmes de densité et corollaires

Théorème 2.2. *Si E est un s -espace alors $\overline{D}_c^s(E, x) = 0$ pour \mathcal{H}^s -presque tout $x \notin E$.*

Démonstration.

Soit $\alpha > 0$.

On veut montrer que l'ensemble $F := \{x \notin E : \overline{D}_c^s(E, x) > \alpha\}$ est de mesure nulle.

On sait que E est \mathcal{H}^s -mesurable et que $\mathcal{H}^s(E) < \infty$, car c'est un s -espace, il vient donc, par régularité de la mesure \mathcal{H}^s , que pour tout $\delta > 0$, il existe $E_1 \subset E$ fermé tel que $\mathcal{H}^s(E \setminus E_1) < \delta$.

Soit $\rho > 0$.

On définit $\mathcal{V}_\rho := \{U : U \text{ fermé et convexe tel que } 0 < |U| \leq \rho, U \cap E_1 = \emptyset \text{ et } \mathcal{H}^s(E \cap U) > \alpha|U|^s\}$.

Montrons que \mathcal{V}_ρ est un recouvrement de Vitali par des fermés de F .

- Si $U \in \mathcal{V}_\rho$ alors, par définition, $0 < |U|$.
- Soit $x \in F$, alors $x \notin E$ et $\overline{D}_c^s(E, x) > \alpha$.
Alors $x \notin E_1$, donc $\text{dist}(x, E_1) > 0$.
Soit $\delta > 0$.
Par définition,

$$\overline{D}_c^s(E, x) = \limsup_{r \rightarrow 0} \left\{ \frac{\mathcal{H}^s(E \cap U)}{|U|^s}, U \text{ convexe tel que } x \in U \text{ et } 0 < |U| \leq r \right\} > \alpha.$$

Donc, il existe $\varepsilon < \min(\rho, \delta, \text{dist}(x, E_1))$ et U convexe, que l'on peut supposer fermé sans perte de généralité, et tel que $x \in U$ et $0 < |U| < \varepsilon$ avec $\frac{\mathcal{H}^s(E \cap U)}{|U|^s} > \alpha$.

Or, comme $\varepsilon < \min(\rho, \delta, \text{dist}(x, E_1)) \leq \text{dist}(x, E_1)$, il vient : $U \cap E_1 = \emptyset$, et puisque $\varepsilon < \min(\rho, \delta, \text{dist}(x, E_1)) \leq \rho$, on a bien obtenu $U \in \mathcal{V}_\rho$. Ainsi, $x \in U$ pour un $U \in \mathcal{V}_\rho$ tel que $|U| < \varepsilon \leq \delta$.

Donc \mathcal{V}_ρ est un recouvrement de Vitali par des fermés de F .

On peut donc appliquer le théorème de Vitali (théorème 2.1 1)) : il existe $(U_i) \subset \mathcal{V}$ suite finie ou dénombrable d'ensembles disjoints tels que soit $\sum |U_i|^s = \infty$ soit $\mathcal{H}^s(F \setminus \bigcup U_i) = 0$.

Or $U_i \in \mathcal{V}$, donc $|U_i|^s < \frac{1}{\alpha} \mathcal{H}^s(E \cap U_i)$. Ainsi, $\sum |U_i|^s < \frac{1}{\alpha} \sum \mathcal{H}^s(E \cap U_i)$, et comme les ensembles sont disjoints, il vient par σ -additivité de la mesure :

$$\frac{1}{\alpha} \sum \mathcal{H}^s(E \cap U_i) = \frac{1}{\alpha} \mathcal{H}^s(E \cap \bigcup_i U_i).$$

Et puisque $U_i \cap E_1 = \emptyset, \forall i$ il vient :

$$\frac{1}{\alpha} \mathcal{H}^s(E \cap \bigcup_i U_i) \leq \frac{1}{\alpha} \mathcal{H}^s(E \setminus E_1) \leq \frac{\delta}{\alpha}.$$

D'où, $\sum |U_i|^s \leq \frac{\delta}{\alpha} < \infty$.

On a donc : $\mathcal{H}^s(F \setminus \bigcup U_i) = 0$.

On en déduit alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\rho^s(F) &\leq \mathcal{H}_\rho^s(F \setminus \bigcup U_i) + \mathcal{H}_\rho^s(F \cap \bigcup U_i) \\ &\leq \mathcal{H}^s(F \setminus \bigcup U_i) + \sum |U_i|^s \\ &= \sum |U_i|^s. \end{aligned}$$

D'où finalement, $\mathcal{H}^s(F) \leq \frac{\delta}{\alpha}$.

Puis, comme $\delta > 0$ est arbitraire (et $\rho > 0$ aussi), on en déduit : $\mathcal{H}^s(F) = 0$.

□

Théorème 2.3. *Si E est un s -espace alors $\overline{D}_c^s(E, x) = 1$ pour \mathcal{H}^s -presque tout $x \in E$.*

Démonstration.

1. Montrons que $\overline{D}_c^s(E, x) \geq 1$ pour \mathcal{H}^s -presque tout $x \in E$, en utilisant la définition de la mesure de Hausdorff.

Soit $\alpha < 1$ et $\rho > 0$,

On pose :

$$\begin{aligned} F &:= \{x \in E : \mathcal{H}^s(E \cap U) \leq \alpha |U|^s \text{ pour tout } U \text{ convexe tel que } x \in U \text{ et } |U| \leq \rho\} \\ &= \left\{ x \in E : \sup \left\{ \frac{\mathcal{H}^s(E \cap U)}{|U|^s} : \text{pour tout } U \text{ convexe tel que } x \in U \text{ et } |U| \leq \rho \right\} \leq \alpha \right\}. \end{aligned}$$

Montrons qu'alors F est \mathcal{H}^s -mesurable.

On note $\varphi_r(x) := \sup \left\{ \frac{\mathcal{H}^s(E \cap U)}{|U|^s} : U \text{ ouvert convexe tel que } x \in U \text{ et } 0 < |U| \leq r \right\}$.

(On peut prendre U ouvert dans la définition de $\overline{D}_c^s(E, x)$ sans perte de généralité.)

On a donc $F = E \cap \varphi_r^{-1}(]-\infty; \alpha])$.

Il suffit donc de montrer que φ_r est \mathcal{H}^s -mesurable, car alors F sera l'intersection de deux ensembles \mathcal{H}^s -mesurables donc sera lui-même \mathcal{H}^s -mesurable.

Montrons donc que φ_r est \mathcal{H}^s -mesurable, pour cela on va montrer que l'ensemble $\varphi_r^{-1}(]a, +\infty[)$ est ouvert quel que soit $a > 0$.

Soit $a > 0$, et soit $x \in \varphi_r^{-1}(]a, +\infty[)$.

Par définition de φ_r , en tant que borne supérieure, on sait qu'il existe un U ouvert convexe non vide tel que $x \in U$ et $0 < |U| \leq r$ qui vérifie : $\frac{\mathcal{H}^s(U \cap E)}{|U|^s} > a$.

Or pour tout $y \in U$, on sait donc qu'il existe un U' (en fait U lui-même) ouvert convexe non vide tel que $x \in U$ et $0 < |U| \leq r$. Et alors, par définition de φ_r comme borne supérieure,

on obtient $\varphi_r(y) \geq \frac{\mathcal{H}^s(U \cap E)}{|U|^s} > a$.

Donc finalement, $y \in \varphi_r^{-1}(]a, +\infty[)$. Donc $U \subset \varphi_r^{-1}(]a, +\infty[)$ et ainsi on a bien montré que $\varphi_r^{-1}(]a, +\infty[)$ est ouvert.

Soit $\varepsilon > 0$.

On a alors un recouvrement de F par des convexes (U_i) tels que $|U_i| \leq \rho$ et

$$\sum |U_i|^s < \mathcal{H}^s(F) + \varepsilon \text{ (cf remarque 1.1).}$$

Alors, si on suppose, sans perte de généralité, que $\forall i, U_i \cap F \neq \emptyset$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^s(F) &\leq \sum \mathcal{H}^s(F \cap U_i) \\ &\leq \sum \mathcal{H}^s(E \cap U_i) \\ &\leq \sum \alpha |U_i|^s \\ &\leq \alpha \sum |U_i|^s \\ &\leq \underbrace{\alpha}_{<1} (\mathcal{H}^s(F) + \varepsilon) \\ &< \alpha \mathcal{H}^s(F) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi en faisant tendre α et ε vers 0, on obtient : $\mathcal{H}^s(F) = 0$.

Comme ceci est vrai pour tout $\rho > 0$, il vient par définition de $\overline{D}_c^s(E, x)$:

$$\mathcal{H}^s(\{x \in E : \overline{D}_c^s(E, x) < \alpha\}) = 0.$$

D'où : $\overline{D}_c^s(E, x) \geq \alpha$ pour \mathcal{H}^s -presque tout $x \in E$.

Puisqu'on a le résultat pour tout $\alpha < 1$, on peut conclure que $\overline{D}_c^s(E, x) \geq 1$ pour \mathcal{H}^s -presque tout $x \in E$.

2. Montrons que $\overline{D}_c^s(E, x) \leq 1$ pour \mathcal{H}^s -presque tout $x \in E$, en utilisant le théorème de Vitali (théorème 2.1).

Soit $\alpha > 1$.

On pose $F := \{x \in E : \overline{D}_c^s(E, x) \geq \alpha\}$.

L'ensemble F est \mathcal{H}^s -mesurable (preuve analogue à la mesurabilité de F du point de la démonstration qui précède).

On pose $F_0 := \{x \in F : \overline{D}_c^s(E \setminus F, x) = 0\}$.

L'ensemble $E \setminus F$ est \mathcal{H}^s -mesurable car E et F le sont. De plus, comme E est un s -espace on sait aussi que $\mathcal{H}^s(E \setminus F) < \infty$. On distingue, maintenant, deux cas :

— Si $\mathcal{H}^s(E \setminus F) = 0$.

Alors, par la définition de $\overline{D}_c^s(E \setminus F, x)$, il vient que, pour tout y , $\overline{D}_c^s(E \setminus F, y) = 0$.

De cela, on déduit que $F = F_0$, puis donc que $\mathcal{H}^s(F \setminus F_0) = 0$.

— On suppose maintenant que $0 < \mathcal{H}^s(E \setminus F)$.

Alors, $E \setminus F$ est un s -espace, on peut donc appliquer le théorème 2.2 : pour \mathcal{H}^s -presque tout $x \notin E \setminus F$, $\overline{D}_c^s(E \setminus F, x) = 0$. Donc pour \mathcal{H}^s -presque tout $x \in F$, on a

$\overline{D}_c^s(E \setminus F, x) = 0$. Ainsi pour \mathcal{H}^s -presque tout $x \in F$, $x \in F_0$. D'où, $\mathcal{H}^s(F \setminus F_0) = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Par sous-additivité de la mesure extérieure, on a, en outre, pour tout $r > 0$ et pour tout U convexe tel que $x \in U$ et $0 < |U| \leq \min(r, \varepsilon)$, $\mathcal{H}^s(E \cap U) \leq \mathcal{H}^s((E \setminus F) \cap U) + \mathcal{H}^s(F \cap U)$. Si $x \in F_0$, il vient donc par définition de la densité convexe :

$$\overline{D}_c^s(F, x) \geq \overline{D}_c^s(E, x) - \overline{D}_c^s(E \setminus F, x) = \overline{D}_c^s(E, x) > \alpha.$$

On pose maintenant : $\mathcal{V} := \{U : U \text{ fermé convexe tel que } \mathcal{H}^s(F \cap U) > \alpha|U|^s\}$.

Par l'inégalité qui précède et comme ε est arbitraire, il vient que \mathcal{V} est un recouvrement de Vitali de F_0 .

Ainsi, d'après le théorème de Vitali (2.1 2)), comme $\mathcal{H}^s(F_0) < \infty$ (car $F_0 \subset F \subset E$ donc $\mathcal{H}^s(F_0) \leq \mathcal{H}^s(F) \leq \mathcal{H}^s(E) < \infty$), on a pour tout $\varepsilon > 0$, l'existence d'une suite (U_i) d'ensembles disjoints de \mathcal{V} tels que :

$$\mathcal{H}^s(F_0) \leq \sum |U_i|^s + \varepsilon.$$

Puis, comme $\mathcal{H}^s(F \setminus F_0) = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^s(F) &\leq \mathcal{H}^s(F_0) \\ &\leq \sum |U_i|^s + \varepsilon \\ &< \frac{1}{\alpha} \sum \mathcal{H}^s(F \cap U_i) + \varepsilon \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \mathcal{H}^s(F) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Comme on a cela pour $\varepsilon > 0$ arbitraire et $\alpha > 1$, on obtient bien $\mathcal{H}^s(F) = 0$.

□

Corollaire 2.1. *Si E est un s -espace, alors $D^s(E, x) = 0$ pour \mathcal{H}^s -presque tout $x \notin E$.*

Démonstration. Soit E un s -espace.

D'après le théorème 2.2, pour \mathcal{H}^s -presque tout $x \notin E$, $\overline{D}_c^s(E, x) = 0$. Et par la proposition 2.1, on a : $2^{-s}\overline{D}_c^s(E, x) \leq \overline{D}^s(E, x) \leq \overline{D}_c^s(E, x)$.

Il vient donc que $\overline{D}^s(E, x) = 0$, pour \mathcal{H}^s -presque tout $x \notin E$.

Puis, par propriété des limites supérieures et inférieures, il vient pour \mathcal{H}^s -presque tout $x \notin E$:

$$0 \leq \underline{D}^s(E, x) \overline{D}^s(E, x) = 0.$$

D'où, $\underline{D}^s(E, x) = 0$, pour \mathcal{H}^s -presque tout $x \notin E$.

D'où finalement, $D^s(E, x) = 0$ pour \mathcal{H}^s -presque tout $x \notin E$.

□

Corollaire 2.2. *Si E est un s -espace, alors pour \mathcal{H}^s -presque tout $x \in E$, on a :*

$$2^{-s} \leq \overline{D}^s(E, x) \leq 1.$$

Démonstration. Soit E un s -espace.

D'après le théorème 2.3, pour \mathcal{H}^s -presque tout $x \in E$, $\overline{D}_c^s(E, x) = 1$. Et en vertu de la proposition 2.1, on obtient bien : $2^{-s} \leq \overline{D}^s(E, x) \leq 1$. \square

Corollaire 2.3. *Soient E un s -espace et F un sous-ensemble \mathcal{H}^s -mesurable de E . Alors, $\underline{D}^s(F, x) = \underline{D}^s(E, x)$ et $\overline{D}^s(F, x) = \overline{D}^s(E, x)$ pour \mathcal{H}^s -presque tout $x \in F$.*

Démonstration. On note $H := E \setminus F$.

D'après le corollaire 2.1, $D^s(H, x) = 0$ pour presque tout $x \notin H$ et donc pour presque tout $x \in F$. On a donc, pour presque tout $x \in F$:

$$\underline{D}^s(E, x) = \underline{D}^s(F, x) + D^s(H, x) = \underline{D}^s(F, x),$$

et de même :

$$\overline{D}^s(E, x) = \overline{D}^s(F, x) + D^s(H, x) = \overline{D}^s(F, x).$$

\square

Corollaire 2.4. *Soit $E = \bigcup_j E_j$ une union dénombrable de s -espaces disjoints avec $\mathcal{H}^s(E) < \infty$.*

Alors, $\forall k$, $\underline{D}^s(E_k, x) = \underline{D}^s(E, x)$ et $\overline{D}^s(E_k, x) = \overline{D}^s(E, x)$ pour \mathcal{H}^s -presque tout $x \in E_k$.

Démonstration. Cela vient directement du corollaire 2.3, que l'on applique à chacun des E_k . \square

Corollaire 2.5. *Soit E un s -espace.*

*Si E est régulier **irrégulier** alors tout sous-ensemble \mathcal{H}^s -mesurable de E de mesure positive est régulier **irrégulier**.*

Démonstration. On suppose E est régulier **irrégulier**.

Soit F un sous-ensemble \mathcal{H}^s -mesurable de E de mesure positive (comme $\mathcal{H}^s(F) \leq \mathcal{H}^s(E) < \infty$, F est bien un s -espace, donc dire que F est régulier a bien un sens, en vertu de la définition 2.5).

Alors par le corollaire 2.3, pour \mathcal{H}^s -presque tout $x \in F$, $\underline{D}^s(F, x) = \underline{D}^s(E, x)$ et $\overline{D}^s(F, x) = \overline{D}^s(E, x)$.

Or E est supposé régulier **irrégulier**, donc pour \mathcal{H}^s -presque tout $x \in E$,

$$\underline{D}^s(E, x) = \overline{D}^s(E, x) = 1 = 0.$$

D'où, pour \mathcal{H}^s -presque tout $x \in F$, $\underline{D}^s(F, x) = \overline{D}^s(F, x) = 1 = 0$, i.e. F est régulier **irrégulier**. \square

Corollaire 2.6.

1. L'intersection d'un ensemble régulier *irrégulier* avec un ensemble \mathcal{H}^s -mesurable est un espace régulier *irrégulier*.
2. L'intersection d'un ensemble régulier et d'un ensemble irrégulier est de mesure nulle.

Démonstration.

1. L'intersection d'un ensemble régulier *irrégulier* avec un ensemble \mathcal{H}^s -mesurable est un sous-ensemble \mathcal{H}^s -mesurable d'un ensemble régulier donc par le corollaire 2.5, il est aussi régulier.
2. Un ensemble régulier *irrégulier* est \mathcal{H}^s -mesurable.
Or par le point précédent, l'intersection d'un \mathcal{H}^s -mesurable et d'un régulier *irrégulier* est régulier *irrégulier*.
Donc l'intersection E d'un ensemble régulier avec un ensemble irrégulier est régulier et irrégulier en même temps. On a alors que pour \mathcal{H}^s -presque tout $x \in E$, $D^s(E, x) = 1$ et $\overline{D}^s(E, x) = 0$, ce qui implique forcément que $\mathcal{H}^s(E) = 0$.

□

Corollaire 2.7. (Théorème de décomposition)

Si E est un s -espace, l'ensemble des points réguliers *irréguliers* de E est régulier *irrégulier*.

Démonstration. Par le lemme 2.1, l'ensemble des points réguliers *irréguliers* est un ensemble \mathcal{H}^s -mesurable (comme l'intersection de l'image réciproque du borélien $\{1\} \setminus \{0\}$ par la fonction borélienne $x \mapsto \underline{D}^s(E, x)$ avec l'image réciproque du borélien $\{1\} \setminus \{0\}$ par la fonction borélienne $x \mapsto \overline{D}^s(E, x)$).

Puis, par le corollaire 2.6, on obtient que les points réguliers *irréguliers* de E sont réguliers *irréguliers* dans F . Ainsi, par définition d'ensemble régulier *irrégulier*, il vient que ces ensembles sont respectivement régulier et *irrégulier*.

□

Chapitre 3

Dimension de Hausdorff du graphe de diverses fonctions

Dans ce chapitre, nous allons travailler dans le plan \mathbb{R}^2 pour étudier la dimension de Hausdorff de Γ défini par :

$$\Gamma := \{(x, f(x)) \mid x \in [0, 1]\},$$

où f est une fonction définie sur l'intervalle $[0, 1]$. L'ensemble Γ est appelé *le graphe de la fonction f* .

3.1 Cas où f est à variation bornée

Définition 3.1. (*Fonction à variation bornée*)

On dit que $\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$ est à variation bornée sur $[0, 1]$ s'il existe $K > 0$ tel que :

$$\sum_{i=1}^m \left| \psi(x_i) - \psi(x_{i-1}) \right| \leq K,$$

pour toute subdivision $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_m = 1$.

On définit $\Lambda := \psi([0, 1])$. Dans ce cas, on définit la longueur de Λ par :

$$\mathcal{L}(\Lambda) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^m \left| \psi(x_i) - \psi(x_{i-1}) \right| : 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_m = 1 \right\},$$

où $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_m = 1$, représente une subdivision quelconque de $[0, 1]$.

Dans cette partie, nous allons calculer la dimension de Hausdorff du graphe d'une fonction à variation bornée. Pour cela, nous avons au préalable besoin de plusieurs lemmes.

Lemme 3.1. Soient E et F deux parties d'espaces vectoriels X et Y (normés par $|\cdot|$) et $\psi : E \rightarrow F$ une application surjective telle que :

$$\exists C > 0, \forall x, y \in E, |\psi(x) - \psi(y)| \leq C|x - y|.$$

Alors :

$$\mathcal{H}^s(F) \leq C^s \mathcal{H}^s(E).$$

Démonstration. Montrons que pour tout $U \subseteq X$, on a : $|\psi(U \cap E)| \leq C|U|$.

$$\begin{aligned} |\psi(U \cap E)| &:= \sup\{|\alpha - \beta| : \alpha, \beta \in \psi(U \cap E)\} \\ &= \sup\{|\psi(x) - \psi(y)| : x, y \in U \cap E\} \\ &\leq C \sup\{|x - y| : x, y \in U \cap E\} \\ &\leq C \sup\{|x - y| : x, y \in U\} \\ &= C|U|. \end{aligned}$$

Donc si $(U_i)_{i \in I}$ est un δ -recouvrement de E , c'est-à-dire que : $E \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ et $|U_i| \leq \delta$, ($\forall i \in I$), alors, comme ψ est surjective, on a : $F \subset \psi(E)$, d'où :

$$F \subset \psi(E) \subset \bigcup_{i \in I} \psi(U_i \cap E),$$

et pour chaque $i \in I$:

$$|\psi(U_i \cap E)| \leq C\delta.$$

Donc $(\psi(U_i \cap E))_{i \in I}$ est un $C\delta$ -recouvrement de F .

De plus,

$$\mathcal{H}_{C\delta}^s(F) \leq \sum_{i \in I} |\psi(U_i \cap E)|^s \leq C^s \sum_{i \in I} |U_i|^s,$$

donc en passant à l'infimum sur tous les recouvrements de E , il vient :

$$\mathcal{H}_{C\delta}^s(F) \leq C^s \mathcal{H}_\delta^s(E).$$

En passant à la limite $\delta \rightarrow 0^+$, il vient :

$$\mathcal{H}^s(F) \leq C^s \mathcal{H}^s(E).$$

□

Dans le second lemme, nous avons besoin de définir la notion de courbe :

Définition 3.2. (Courbe)

On dit que Λ est une courbe s'il existe une paramétrisation de Λ notée $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui est continue et injective.

Lemme 3.2. Si Λ est une courbe, alors $\mathcal{H}^1(\Lambda) = \mathcal{L}(\Lambda)$.

Démonstration. Notons z et w les deux points délimitant les extrémités de la courbe Λ . On note P_d la projection orthogonale de \mathbb{R}^2 sur la droite d passant par z et w . On sait que P_d est 1-lipschitzienne donc :

$$|P_d(x) - P_d(y)| \leq |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2.$$

L'application de projection est surjective, donc on peut utiliser le lemme 3.1, ainsi :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^1(\Lambda) &\geq \mathcal{H}^1(P_d(\Lambda)) \\ &= \mathcal{L}([z, w]) \\ &= |z - w|.\end{aligned}$$

Maintenant on suppose que Λ est paramétrisée par $\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$. D'après le calcul précédent, on remarque que pour tout $t, u \in [0, 1]$:

$$\mathcal{H}^1(\psi([t, u])) \geq |\psi(t) - \psi(u)|.$$

Soit $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$, une subdivision quelconque de $[0, 1]$, alors :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m |\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})| &\leq \sum_{i=1}^m \mathcal{H}^1(\psi([t_{i-1}, t_i])) \\ &= \mathcal{H}^1(\Lambda),\end{aligned}$$

puisque les arcs $\psi([t_{i-1}, t_i])$ de Λ sont disjoints sauf pour les extrémités. Donc $\mathcal{L}(\Lambda) \leq \mathcal{H}^1(\Lambda)$.

Il reste à montrer l'autre inégalité. Si $\mathcal{L}(\Lambda) = +\infty$, la partie précédente montre que $\mathcal{H}^1(\Lambda) = +\infty$. On peut donc supposer que $\mathcal{L}(\Lambda) < +\infty$. Soit σ une paramétrisation par longueur d'arc⁽¹⁾ de Λ . La fonction σ est surjective de $[0, \mathcal{L}(\Lambda)]$ vers Λ . De plus, pour tout $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \mathcal{L}(\Lambda)$, on a :

$$|\sigma(t_1) - \sigma(t_2)| \leq (t_2 - t_1).$$

En effet, $t_2 - t_1 = \mathcal{L}(\sigma([0, t_2])) - \mathcal{L}(\sigma([0, t_1]))$ et $\mathcal{L}(\sigma([0, t_2])) = \mathcal{L}(\sigma([0, t_1])) + \mathcal{L}(\sigma([t_1, t_2]))$. On trouve ainsi :

$$\begin{aligned}t_2 - t_1 &= \mathcal{L}(\sigma([t_1, t_2])) \\ &\geq |\sigma(t_2) - \sigma(t_1)|,\end{aligned}$$

car $t_1 < t_2$ est une subdivision particulière de $[t_1, t_2]$.

On peut donc appliquer le lemme 3.1 pour affirmer que :

$$\mathcal{H}^1(\Lambda) = \mathcal{H}^1(\sigma([0, \mathcal{L}(\Lambda)])) \leq \mathcal{H}^1([0, \mathcal{L}(\Lambda)]) = \mathcal{L}(\Lambda).$$

□

On peut donc conclure cette partie avec le théorème suivant :

Théorème 3.1. *Si $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et à variation bornée, alors $\dim(\Gamma) = 1$, où Γ représente le graphe de f .*

Démonstration. On définit $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ par $F(t) := (t, f(t))$ pour tout $t \in [0, 1]$. Comme f est continue et à variation bornée, on en déduit que F est également continue et à variation bornée. On en déduit ainsi que $\mathcal{L}(\Lambda) < +\infty$. Le lemme 3.2 montre que $\mathcal{H}^1(\Lambda) = \mathcal{L}(\Lambda)$, donc $0 < \mathcal{H}^1(\Lambda) = \mathcal{H}^1(\Gamma) < +\infty$, donc $\dim(\Gamma) = 1$. □

Cependant, si f est suffisamment irrégulière (même en restant continue), il est possible que Γ ait une dimension de Hausdorff supérieure à 1. Dans de tels cas, il peut être difficile de calculer la dimension de Hausdorff de Γ à partir de la simple connaissance de f . Nous allons donc étudier quelques cas particuliers.

(1). voir *Introduction à la géométrie* de Pascal Dupont (De Boeck, Bruxelles, 2002)

3.2 Condition de Hölder

Théorème 3.2. Soient $s > 1$ et $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\exists h_0, c > 0, \forall x \in [0, 1], \forall 0 < h < h_0, |f(x+h) - f(x)| \leq ch^{2-s},$$

où l'on a prolongé la fonction f par $f(1)$ pour $x \geq 1$. Alors :

$$\mathcal{H}^s(\Gamma) < +\infty.$$

Remarque 3.1. La condition sur f du théorème ci-dessus est appelée condition de Hölder. Elle permet d'obtenir une borne supérieure sur la dimension de Hausdorff de Γ .

Démonstration. Soit I un intervalle sur l'axe des abscisses de longueur $h < h_0$. Par définition,

$$|f(I)| = \sup\{|f(y) - f(x)| : x, y \in I\}.$$

Mais f est continue donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f(I)$ est un intervalle donc :

$$\mathcal{L}(f(I)) = |f(I)| \leq ch^{2-s}.$$

Ainsi l'ensemble $\{(x, f(x)) : x \in I\}$ peut être recouvert par $m := \lfloor h^{-1}ch^{2-s} \rfloor + 1$ carrés de côté h , notés C_i^I pour $1 \leq i \leq m$. On effectue ensuite une subdivision régulière de $[0, 1]$ en m parties égales de longueur $h = \frac{1}{m} < h_0$. Il s'agit d'une subdivision particulière de $[0, 1]$. De plus, le diamètre des carrés C_i^I (pour $1 \leq i \leq m$) de taille h est égal à $\sqrt{2}h$ (d'après le théorème de Pythagore) et $\Gamma \subseteq \bigcup_{I \in \Gamma} \bigcup_{i=1}^m C_i^I$. Donc par définition de l'infimum, il vient :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\sqrt{2}h}^s(\Gamma) &\leq \sum_{I \in \Gamma} \left(\sum_{i=1}^m |C_i^I|^s \right) (h^{-1}ch^{2-s} + 1) \\ &\leq m(\sqrt{2}h)^s (h^{-1}ch^{2-s} + 1) \\ &= m2^{s/2}ch + m2^{s/2}h^s \\ &= \frac{1}{h}2^{s/2}ch + \frac{1}{h}2^{s/2}h^s \\ &= cs^{s/2}(1 + c^{-1}h^{s-1}) \\ &\leq c2^{1+s/2}, \end{aligned}$$

pour h suffisamment petit car $s > 1$.

Donc $\mathcal{H}_{\sqrt{2}h}^s(\Gamma) \leq c2^{1+s/2}$ pour h petit. On peut donc faire tendre h vers 0^+ dans l'inégalité précédente pour avoir :

$$\mathcal{H}^s(\Gamma) \leq c2^{1+s/2} < +\infty.$$

□

3.3 Fonctions à fortes oscillations

Un moyen naturel d'obtenir une fonction dont le graphe a une structure plus fine est d'additionner une suite de fonctions qui oscillent de plus en plus rapidement. Ainsi si $(a_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une suite sommable et si $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une suite qui tend vers $+\infty$, alors la fonction ϕ définie par une série trigonométrique

$$\phi(x) := \sum_{i=1}^{+\infty} a_i \sin(\lambda_i x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

pourrait avoir un graphe de dimension de Hausdorff supérieure à 1 si on choisit attentivement les a_i et les λ_i pour $i \in \mathbb{N}^*$. Nous allons introduire la fonction de Weierstrass.

Définition 3.3. (*Fonction de Weierstrass*)

Soient $1 < s < 2$ et $\lambda > 1$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on définit W par :

$$W(x) := \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda^{(s-2)i} \sin(\lambda^i x).$$

Remarque 3.2. Cette fonction est continue partout mais dérivable nulle part. Un récent article ⁽²⁾, datant du 11 octobre 2017, a réussi à montrer que la dimension de son graphe vaut exactement s . Une variante de la fonction de Weierstrass est la fonction :

$$h(x) := \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \lambda^{(s-2)i} (1 - \cos(\lambda^i x)),$$

introduite par Mandelbrot en 1977.

Proposition 3.1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h(\lambda x) = \lambda^{2-s} h(x).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} h(\lambda x) &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \lambda^{(s-2)i} (1 - \cos(\lambda^i(\lambda x))) \\ &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \lambda^{(s-2)i} (1 - \cos(\lambda^{i+1}x)) \\ &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \lambda^{(s-2)(i-1)} (1 - \cos(\lambda^i x)) \\ &= \lambda^{2-s} h(x). \end{aligned}$$

□

(2). voir *Hausdorff dimension of the graphs of the classical Weierstrass functions* - Mathematische Zeitschrift volume 289, pages 223–266 (2018) de Weixiao Shen

A nouveau la dimension du graphe de h est s . En 1980, Berry et Lewis ont réalisé des simulations numériques de ces fonctions pour des applications physiques. Pour faciliter le calcul, il est pratique de remplacer les fonctions sinus par des fonctions périodiques légèrement différentes :

Définition 3.4. (La fonction "Zig-Zag")

On définit la fonction g sur \mathbb{R} par :

$$g(4k + y) = \begin{cases} y & \text{si } 0 \leq y < 1, \\ 2 - y & \text{si } 1 \leq y < 3, \\ y - 4 & \text{si } 3 \leq y < 4, \end{cases}$$

pour $k \in \mathbb{Z}$ et $y \in [0, 4[$. Cette fonction est donc 4-périodique par définition.

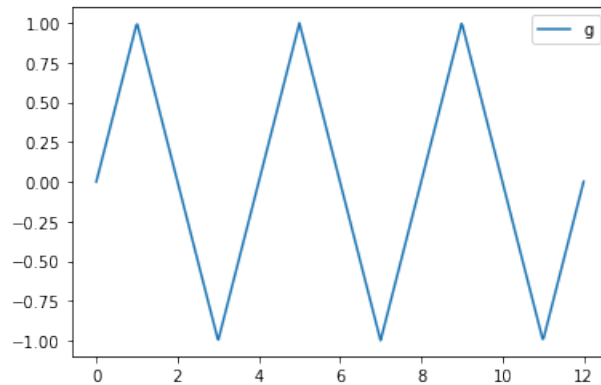


FIGURE 3.1 – Graphe de la fonction g sur $[0, 12]$.

Remarque 3.3. On remarque que pour tout $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, on a $|g'(x)| = 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|g(x)| \leq 1$. Afin de présenter une preuve complète et raisonnable, nous allons étudier les fonctions :

$$f(x) := \sum_{i=1}^{+\infty} a_i g(\lambda_i x),$$

à la place des fonctions précédentes.

En 1937, Besicovitch et Ursell ont trouvé ⁽³⁾ la dimension de Hausdorff de la fonction précédente. Ce résultat est résumé dans le théorème suivant :

(3). voir *Sets of fractional dimension (V) : On dimensional numbers of some continuous curves*, J. London Math. Soc. 12(1937), 18-25 de Besicovitch et Ursell

Théorème 3.3. Soit $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres positifs vérifiant les propriétés suivantes :

- $\left(\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\right)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est croissante,
- $\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} +\infty$,
- $\frac{\log(\lambda_{i+1})}{\log(\lambda_i)} \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} 1$.

et soit Γ le graphe de la fonction f définie par

$$f(x) := \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i^{s-2} g(\lambda_i x),$$

pour $x \in [0, 1]$ et $1 < s < 2$.

Alors $\dim(\Gamma) = s$.

Pour démontrer ce théorème, nous avons besoin de plusieurs résultats :

Lemme 3.3. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq N$, on a :

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i^{s-1} \leq 2\lambda_k^{s-1},$$

et

$$\sum_{i=k+1}^{+\infty} \lambda_i^{s-2} \leq 2\lambda_{k+1}^{s-2},$$

avec les λ_i et le s défini dans l'énoncé du théorème 3.3.

Démonstration. Nous allons tout d'abord démontrer la première inégalité. Comme $\left(\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\right)^{s-1} \rightarrow +\infty$, il existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $i \geq k_1$, on a $\left(\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\right)^{s-1} \geq 3$. Ainsi pour $k_1 \leq j \leq k$, il vient par récurrence immédiate $\lambda_j^{s-1} \leq 3^{k-j} \lambda_k^{s-1}$. On a donc :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \lambda_i^{s-1} &= \sum_{i=1}^{k_1-1} \lambda_i^{s-1} + \sum_{i=k_1}^k 3^{k-i} \lambda_k^{s-1} \\ &= \sum_{i=1}^{k_1-1} \lambda_i^{s-1} + \lambda_k^{s-1} \sum_{j=0}^{k-k_1} 3^{-j} \\ &\leq \sum_{i=1}^{k_1-1} \lambda_i^{s-1} + \lambda_k^{s-1} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= \sum_{i=1}^{k_1-1} \lambda_i^{s-1} + \frac{3}{2} \lambda_k^{s-1}. \end{aligned}$$

En divisant l'inégalité précédente par $\lambda_k^{s-1} \neq 0$, il vient :

$$\frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i^{s-1}}{\lambda_k^{s-1}} \leq \frac{\sum_{i=1}^{k_1-1} \lambda_i^{s-1}}{\lambda_k^{s-1}} + \frac{3}{2} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \frac{3}{2} < 2.$$

Il existe donc $k_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_2$, on a :

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i^{s-1} \leq 2\lambda_k^{s-1}.$$

Nous allons maintenant montrer la deuxième inégalité du lemme. Comme $s - 2 < 0$, on a $\left(\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\right)^{s-2} \rightarrow 0$, et il existe $k_3 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $i \geq k_3$, on a $\left(\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\right)^{s-2} \leq \frac{1}{2}$. Ainsi pour $k_3 \leq j \leq i$, il vient par récurrence immédiate $\lambda_i^{s-2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{i-j} \lambda_j^{s-1}$. On a donc pour tout $k \geq k_3$:

$$\sum_{i=k+1}^{+\infty} \lambda_i^{s-2} \leq \lambda_{k+1}^{s-2} \sum_{i=k+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{i-k-1} \leq 2\lambda_{k+1}^{s-2}.$$

Il suffit donc de poser $N := \max(k_2, k_3)$ pour avoir les deux inégalités souhaitées. \square

Remarque 3.4. *Il est intéressant de remarquer que la mesure de Lebesgue dans \mathbb{R}^2 du graphe d'une fonction est toujours nulle. Ce qui n'est pas toujours le cas pour la mesure s -dimensionnelle de Hausdorff (pour $1 < s < 2$).*

Proposition 3.2. *Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle quelconque et soit $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Notons Γ le graphe de g . Alors $\mathcal{L}^2(\Gamma) = 0$.*

Démonstration. On applique le théorème de Fubini pour avoir :

$$\mathcal{L}^2(\Gamma) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_\Gamma = \int_{\mathbb{R}} dy \int_{\{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in \Gamma\}} 1 \, dx.$$

Mais l'ensemble $\{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in \Gamma\}$ possède au plus un seul élément, donc il est en particulier de mesure nulle. Donc l'intégrale correspondante est nulle également. Ainsi $\mathcal{L}^2(\Gamma) = 0$. \square

Lemme 3.4. *Soient $0 < t < s$ et $a > 0$. Alors :*

$$\frac{\lambda_{k+1}^t}{\lambda_k^{(s+t)/2}} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0,$$

et

$$\frac{6^{ak}}{\lambda_k^{(s-t)/2}} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0,$$

avec les λ_i et le s défini dans l'énoncé du théorème 3.3.

Démonstration. Nous allons commencer par déterminer la première limite. On considère des quantités strictement positives donc on peut passer au logarithme :

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{\lambda_{k+1}^t}{\lambda_k^{(s+t)/2}}\right) &= t \log(\lambda_{k+1}) - \frac{s+t}{2} \log(\lambda_k) \\ &= \log(\lambda_k) \left[t \frac{\log(\lambda_{k+1})}{\log(\lambda_k)} - \frac{s}{2} - \frac{t}{2} \right] \\ &\underset{+\infty}{\sim} \frac{\log(\lambda_k)}{2} (t-s),\end{aligned}$$

car $\frac{\log(\lambda_{k+1})}{\log(\lambda_k)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1$, par hypothèse. Comme $t-s < 0$, on en déduit que $\log\left(\frac{\lambda_{k+1}^t}{\lambda_k^{(s+t)/2}}\right) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} -\infty$, donc $\frac{\lambda_{k+1}^t}{\lambda_k^{(s+t)/2}} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$.

Nous allons maintenant déterminer la seconde limite. Par hypothèse, $\frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty$ et comme $\frac{s-t}{2} > 0$, on a $\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}}\right)^{(s-t)/2} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty$. Ainsi il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq N$, on a $\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}}\right)^{(s-t)/2} \geq 7^a$. Par récurrence immédiate, il vient $\lambda_k^{(s-t)/2} \geq 7^{ak} \lambda_1^{(s-t)/2}$. Donc :

$$\begin{aligned}\frac{6^{ak}}{\lambda_k^{(s-t)/2}} &\leq \frac{6^{ak}}{7^{ak} \lambda_1^{(s-t)/2}} \\ &= \left(\frac{6}{7}\right)^{ak} \frac{1}{\lambda_1^{(s-t)/2}} \\ &\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.\end{aligned}$$

□

Lemme 3.5. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ avec $k \geq N$, où N est donné dans le lemme 3.3. On pose $h := \lambda_k^{-1}$. Soit S un carré de côté h parallèle aux axes des coordonnées. On note I l'intervalle de projection de S sur l'axe des abscisses. On pose pour tout $x \in [0, 1]$:

$$f_k(x) := \sum_{i=1}^k \lambda_i^{s-2} g(\lambda_i x),$$

où les λ_i , le s et la fonction g sont définis dans le théorème 3.3. Alors f'_k change de signe au plus une fois sur l'intervalle I .

Démonstration. Par définition de la fonction g , on a :

$$g'(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in \bigcup_{l \in \mathbb{Z}}]4l-1, 4l+1[, \\ -1 & \text{si } y \in \bigcup_{l \in \mathbb{Z}}]4l+1, 4l+3[. \end{cases}$$

En séparant la somme partielle de f en deux parties, on obtient :

$$f_k(x) = \lambda_k^{s-2} g(\lambda_k x) + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i^{s-2} g(\lambda_i x).$$

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\phi_k(x) := \lambda_k^{s-2} g(\lambda_k x)$. On a alors :

$$\phi'_k(x) = \begin{cases} \lambda_k^{s-1} & \text{si } x \in \frac{4l}{\lambda_k} + J_k \ (l \in \mathbb{Z}), \\ -\lambda_k^{s-1} & \text{si } x \in \frac{4l+2}{\lambda_k} + J_k \ (l \in \mathbb{Z}), \end{cases}$$

où $J_k := \left] -\frac{1}{\lambda_k}, \frac{1}{\lambda_k} \right]$. Pour tout $x \in j \frac{2}{\lambda_k} + J_k$ (avec $j \in \mathbb{Z}$), on a : $\phi'_k(x) = (-1)^j \lambda_k^{s-1}$. Par hypothèse, on a $|I| = h = \lambda_k^{-1} = \frac{1}{2}|J_k|$. Il existe donc au plus deux entiers consécutifs que l'on note j et $j+1$ tels que :

$$I \subseteq \left(j \frac{2}{\lambda_k} + J_k \right) \cup \left((j+1) \frac{2}{\lambda_k} + J_k \right).$$

On pose $I_1 := j \frac{2}{\lambda_k} + J_k$ et $I_2 := (j+1) \frac{2}{\lambda_k} + J_k$. On a alors :

$$\phi'_k(x) = \begin{cases} (-1)^j \lambda_k^{s-1} & \text{sur } \overset{\circ}{I}_1, \\ (-1)^{j+1} \lambda_k^{s-1} & \text{sur } \overset{\circ}{I}_2. \end{cases}$$

Ainsi sur $\overset{\circ}{I}_1$, on a :

$$f'_k(x) = (-1)^j \lambda_k^{s-1} + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i^{s-1} g'(\lambda_i x).$$

On observe que :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i^{s-1} g'(\lambda_i x) \right| &\leq \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i^{s-1} \\ (*) &\leq 2\lambda_{k-1}^{s-1} \\ &< \lambda_k^{s-1}, \end{aligned}$$

où (*) provient directement du lemme 3.3. Ce résultat est valable pour $k \geq N$ donné par le lemme 3.3.

On a donc sur $\overset{\circ}{I}_1$, le fait que :

$$\text{signe}(f'_k(x)) = \text{signe}((-1)^j).$$

De même sur $\overset{\circ}{I}_2$, on a :

$$\text{signe}(f'_k(x)) = \text{signe}((-1)^{j+1}).$$

□

Nous allons maintenant démontrer le théorème 3.3.

Démonstration. (Théorème 3.3)

[Étape 1 : Montrons que $\mathcal{H}^s(\Gamma) < +\infty$.]

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On choisit h tel que : $\lambda_{k+1}^{-1} \leq h \leq \lambda_k^{-1}$ (possible car la suite $\left(\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\right)_i$ est croissante).

Alors :

$$\begin{aligned}
|f(x+h) - f(x)| &= \left| \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i^{s-2} g(\lambda_i(x+h)) - \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i^{s-2} g(\lambda_i x) \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i^{s-2} |g(\lambda_i(x+h)) - g(\lambda_i x)| \\
&= \sum_{i=1}^k \lambda_i^{s-2} |g(\lambda_i(x+h)) - g(\lambda_i x)| \\
&\quad + \sum_{i=k+1}^{+\infty} |g(\lambda_i(x+h)) - g(\lambda_i x)| \\
&\leq \sum_{i=1}^k \lambda_i^{s-2} |g(\lambda_i(x+h)) - g(\lambda_i x)| + 2 \sum_{i=k+1}^{+\infty} \lambda_i^{s-2} \\
&\stackrel{(*)}{\leq} \sum_{i=1}^k \lambda_i^{s-2} |\lambda_i(x+h) - \lambda_i x| + 2 \sum_{i=k+1}^{+\infty} \lambda_i^{s-2} \\
&= h \sum_{i=1}^k \lambda_i^{s-1} + 2 \sum_{i=k+1}^{+\infty} \lambda_i^{s-2} \\
&\stackrel{(**)}{\leq} 2h \lambda_k^{s-1} + 4 \lambda_{k+1}^{s-2},
\end{aligned}$$

pour k suffisamment grand, où $(*)$ est conséquence de l'inégalité des accroissements finis pour les fonctions lipschitziennes et $(**)$ provient directement du lemme 3.3.

On suppose donc k assez grand (ainsi h va être petit). Par définition de h , on a $\lambda_{k+1}^{-1} \leq h \leq \lambda_k^{-1}$, donc :

$$\lambda_{k+1}^{s-2} = (\lambda_{k+1}^{-1})^{2-s} \leq h^{2-s}, \text{ car } 2-s > 0,$$

et

$$\lambda_k^{s-1} = (\lambda_k^{-1})^{1-s} \leq h^{1-s}, \text{ car } 1-s < 0.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
|f(x+h) - f(x)| &\leq 2h h^{1-s} + 4h^{2-s} \\
&= 2h^{2-s} + 4h^{2-s} \\
&= 6h^{2-s}.
\end{aligned}$$

Pour tout $k \geq N$ (N défini dans le lemme 3.3) et pour tout h réel avec $\lambda_{k+1}^{-1} \leq h \leq \lambda_k^{-1}$, on a $|f(x+h) - f(x)| \leq 6h^{2-s}$. Il existe donc $h_0 > 0$ tel que pour tout $h \leq h_0$, on a $|f(x+h) - f(x)| \leq 6h^{2-s}$ et d'après le théorème 3.2, on en déduit que $\mathcal{H}^s(\Gamma) < +\infty$.

[Étape 2 : Montrons que pour tout $0 < t < s$, on a $0 < \mathcal{H}^t(\Gamma)$.]

Cette étape nécessite davantage de travail. Soit S un carré, avec des côtés de longueur $h > 0$,

parallèle aux axes des coordonnées. Soit I l'intervalle de projection de S sur l'axe des abscisses. D'après la proposition 3.2, la mesure de Lebesgue de l'ensemble

$$E := \{x \in \mathbb{R} : (x, f(x)) \in S\} \subseteq \mathbb{R},$$

est nulle. On définit les sommes partielles

$$f_k(x) := \sum_{i=1}^k \lambda_i^{s-2} g(\lambda_i x),$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Comme la suite $\left(\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\right)_i$ tend vers $+\infty$, on peut supposer que l'on dispose d'un k suffisamment grand afin d'avoir les inégalités $2 \leq 2\lambda_k \leq \lambda_{k+1}$. Dans ce cas, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f_k(x)| &= \left| \sum_{i=k+1}^{+\infty} \lambda_i^{s-2} g(\lambda_i x) \right| \\ (*) &\leq \sum_{i=k+1}^{+\infty} \lambda_i^{s-2} \\ (**) &\leq 2\lambda_{k+1}^{s-2}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

où $(*)$ provient du fait que $|g| \leq 1$ et $(**)$ du lemme 3.3. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$ où f_k est dérivable, on a :

$$\begin{aligned} |f'_k(x)| &= \left| \sum_{i=1}^k \lambda_i^{s-1} g'(\lambda_i x) \right| \\ &\geq \lambda_k^{s-1} - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i^{s-1} \\ &\geq \frac{1}{2} \lambda_k^{s-1}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

d'après le lemme 3.3 et par le fait que $|g'| \leq 1$.

Supposons tout d'abord que le carré S a un côté $h := \lambda_k^{-1}$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\lambda_{k+m}^{s-2} \leq h := \lambda_k^{-1} \leq \lambda_{k+m-1}^{s-2}. \tag{3.3}$$

Il est important de noter que m dépend de k par définition. On observe que trouver un tel m est possible car la suite $\left(\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\right)_i$ tend vers $+\infty$ et $s-2 < 0$. Comme la suite $\left(\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\right)_i$ est croissante, on a :

$$\forall i \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket, \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} \leq \frac{\lambda_{k+i}}{\lambda_{k+i-1}}.$$

Donc, comme les λ_i sont positifs, il vient :

$$\prod_{i=1}^{m-1} \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} < \prod_{i=1}^{m-1} \frac{\lambda_{k+i}}{\lambda_{k+i-1}},$$

c'est-à-dire :

$$\left(\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}\right)^{m-1} \lambda_k < \lambda_k \prod_{i=1}^{m-1} \frac{\lambda_{k+i}}{\lambda_{k+i-1}}.$$

Comme $2 - s > 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}\right)^{(m-1)(2-s)} \lambda_k^{2-s} &< \left(\frac{\lambda_{k+m-1}}{\lambda_{k+m-2}} \cdots \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} \lambda_k\right)^{2-s} \\ &= \lambda_{k+m-1}^{2-s} \\ &< \lambda_k, \end{aligned}$$

car $\lambda_k^{-1} < \lambda_{k+m-1}^{s-2}$. On obtient finalement :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}\right)^{(m-1)(2-s)} &< \lambda_k \lambda_k^{s-2} \\ &= \lambda_k^{s-1} \\ &= \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}} \cdots \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{s-1} \\ &< \left(\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}\right)^{(k-1)(s-1)} \lambda_1^{s-1}, \end{aligned}$$

par croissance de la suite $\left(\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\right)_i$. En passant au logarithme dans l'inégalité précédente, nous allons ainsi montrer qu'il existe une constante $a > 0$ (indépendante de k) telle que $m \leq ak$. On rappelle que m dépend de k par construction. On obtient :

$$(m-1)(2-s) \log \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} < (k-1)(s-1) \log \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} + \log (\lambda_1^{s-1}).$$

On réordonne l'inégalité précédente pour obtenir :

$$\frac{m}{k} < \frac{s-1}{2-s} + \frac{3-2s}{k(2-s)} + \frac{\log (\lambda_1^{s-1})}{k(2-s) \log \left(\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}\right)}.$$

En passant à la limite $k \rightarrow +\infty$, les deux derniers termes du membre de droite de l'inégalité précédente tendent vers 0, donc :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{m}{k} \leq \frac{s-1}{2-s}.$$

Donc la suite $\left(\frac{m}{k}\right)_k$ est bornée par une constante indépendante de k .

[Cas 1 : $m = 1$]

D'après (3.1), si $(x, f(x)) \in S$ alors $(x, f_k(x)) \in R_1$, où R_1 est le rectangle obtenu en rajoutant une longueur $2\lambda_{k+1}^{s-2} \leq 2h$ en haut et en bas de S . D'après le lemme 3.5, f'_k change de signe au plus une fois sur I , donc le graphe de f_k ne peut pas sortir du carré S plus d'une fois. D'après (3.2), sur chaque intervalle où f'_k est de signe constant, on a : $|f'_k(x)| \geq \frac{1}{2} \lambda_k^{s-1}$.

Ainsi $(x, f_k(x)) \in R_1$ pour x dans un intervalle de longueur au plus $\frac{1}{\frac{1}{2} \lambda_k^{s-1}} = 2\lambda_k^{1-s}$ fois la hauteur

de R_1 . En effet, soit $J \subseteq I$ un intervalle tel que pour tout $x \in J$, on a $(x, f_k(x)) \in R_1$, alors :

$$\begin{aligned} \text{hauteur}(R_1) &\geq |f_k(\max(J)) - f_k(\min(J))| \\ &= \int_J |f'_k| \\ &\geq |J| \frac{1}{2} \lambda_k^{s-1}. \end{aligned}$$

Donc $|J| \leq \text{hauteur}(R_1) 2\lambda_k^{1-s}$. De plus,

$$\text{hauteur}(R_1) = h + 2(2\lambda_{k+1}^{s-2}) \leq h + 4h = 5h.$$

Et comme il y a au plus deux intervalles J vérifiant les propriétés précédentes, on en déduit que :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^1(E) &\leq 2(5h)(2\lambda_k^{1-s}) \\ &= 20 \lambda_k^{-1} \lambda_k^{1-s} \\ &= 20 \lambda_k^{-s} \\ &= 20h^s. \end{aligned}$$

[Cas 2 : $m > 1$]

On peut diviser I en au plus deux intervalles J_1 et J_2 , où f'_k est de signe constant sur J_1 et sur J_2 . D'après (3.3), la hauteur de R_1 est : $h + 2(2\lambda_{k+1}^{s-2}) \leq 5\lambda_{k+1}^{s-2}$. Donc sur chaque intervalle J_i ($i \in \{0, 1\}$), on considère les sous intervalles K_i définis par $K_i := \text{proj}_{(Ox)}(E) \cap J_i$. Pour $i \in \{0, 1\}$, on a :

$$|K_i| = 2\lambda_k^{1-s} 5\lambda_{k+1}^{s-2}.$$

On divise chaque K_i ($i \in \{0, 1\}$) en plusieurs parties où f'_{k+1} est de signe constant sur chacune de ces parties. On obtient au plus $(2\lambda_k^{1-s} 5\lambda_{k+1}^{s-2}) 2 \frac{1}{4\lambda_{k+1}^{-1}} + 1$ nouveaux intervalles au sein de chaque K_i ($i \in \{0, 1\}$). En effet, le terme $\frac{1}{4\lambda_{k+1}^{-1}}$ correspond à l'inverse de la période de la fonction $x \mapsto g(\lambda_{k+1}x)$. On observe que :

$$\begin{aligned} (2\lambda_k^{1-s} 5\lambda_{k+1}^{s-2}) \frac{1}{2} \lambda_{k+1} + 1 &= 5\lambda_k^{1-s} \lambda_{k+1}^{s-1} + 1 \\ &= 5 \left(\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} \right)^{s-1} + 1 \\ &\leq 6 \left(\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} \right)^{s-1}. \end{aligned}$$

[Cas 3 : $m > 2$]

On répète le processus sur chacun des intervalles précédents. D'après ce qui précède, il y aura au plus $6 \left(\frac{\lambda_{k+2}}{\lambda_{k+1}} \right)^{s-1}$ nouveaux intervalles sur lesquels f'_{k+2} est de signe constant. En répétant ce processus $m - 2$ fois, on remarque que l'ensemble E est recouvert par au plus :

$$2 \cdot 6^{m-1} \left(\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} \frac{\lambda_{k+2}}{\lambda_{k+1}} \dots \frac{\lambda_{k+m-1}}{\lambda_{k+m-2}} \right)^{s-1} = 2 \cdot 6^{m-1} \left(\frac{\lambda_{k+m-1}}{\lambda_k} \right)^{s-1},$$

intervalles sur lesquels f'_{k+m-1} est de signe constant. D'après (3.1), $(x, f(x)) \in S$ lorsque $(x, f_{k+m-1}(x)) \in R_2$, où R_2 est le rectangle formé en augmentant S d'une longueur $2\lambda_{k+m}^{s-2}$ au dessus et en dessous. On utilise (3.3) pour affirmer que : $\text{hauteur}(R_2) = h + 2(2\lambda_{k+m}^{s-2}) \leq 5h$. Ainsi :

$$\mathcal{L}^1(E) \leq 2 \cdot 6^{m-1} \left(\frac{\lambda_{k+m-1}}{\lambda_k} \right)^{s-1} (2\lambda_{k+m-1}^{1-s}) 5h,$$

car chaque intervalle (lors de la dernière étape) a une longueur plus petite que $2\lambda_{k+m-1}^{1-s}$ fois la hauteur de R_2 . Ce résultat se démontre d'une manière analogue au cas 1. On trouve ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^1(E) &\leq 2 \cdot 6^{m-1} \left(\frac{\lambda_{k+m-1}}{\lambda_k} \right)^{s-1} 5h \cdot 2\lambda_{k+m-1}^{1-s} \\
&= 20 \cdot 6^{m-1} \lambda_k^{1-s} h \\
&= 20 \cdot 6^{m-1} \lambda_k^{1-s} \lambda_k^{-1} \\
&= 20 \cdot 6^{m-1} h^s \\
&\leq 20 \cdot 6^{ak} h^s,
\end{aligned}$$

puisque l'on a $m-1 \leq m \leq ak$. Soit $0 < t < s$, on suppose maintenant que $\lambda_{k+1}^{-1} < h \leq \lambda_k^{-1}$. Ainsi :

$$\mathcal{L}^1(E) \leq 20 \cdot 6^{ak} \lambda_k^{-s} = 20 \lambda_{k+1}^{-t} \frac{\lambda_{k+1}^t}{\lambda_k^{(s+t)/2}} \frac{6^{ak}}{\lambda_k^{(s-t)/2}}.$$

On applique le lemme 3.4 qui assure que les deux facteurs à droite tendent vers 0, donc il existe $C_1 > 0$ tel que $\mathcal{L}^1(E) \leq C_1 (\lambda_{k+1}^{-1})^t$, pour k assez grand. Et comme $\lambda_{k+1}^{-1} < h \leq \lambda_k^{-1}$, il vient :

$$\mathcal{L}^1(E) \leq C_1 h^t. \quad (3.4)$$

Soit $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ un δ -recouvrement quelconque de Γ , avec $\delta > 0$ assez petit. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on choisit un carré $S_i^{(4)}$ tel que :

- $U_i \subseteq S_i$,
- S_i a ses côtés de longueur $|U_i|$,
- S_i est parallèle aux axes de coordonnées.

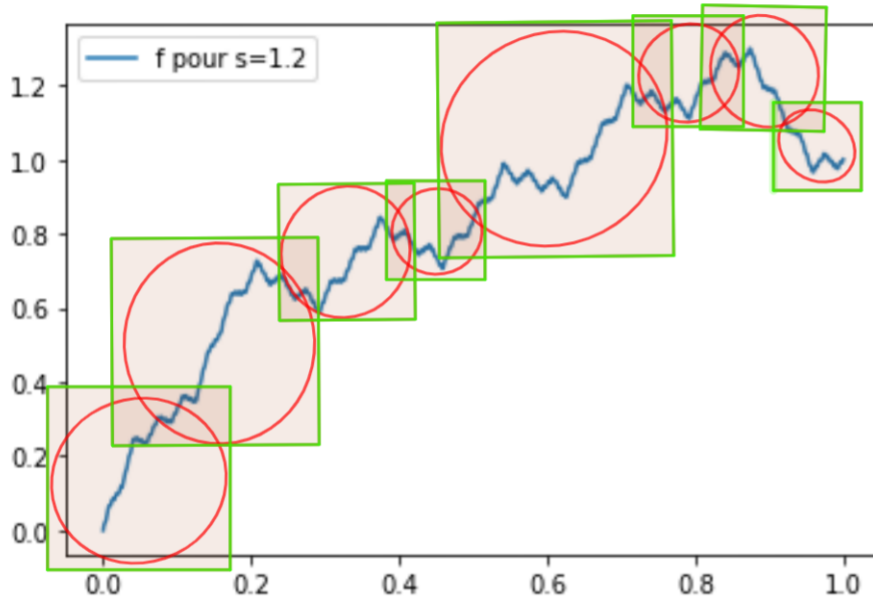


FIGURE 3.2 – Recouvrement du graphique de la fonction f avec les carrés pour $s = 1.2$.

(4). voir schéma explicatif

Soit $0 < t < s$, on a :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} |U_i|^t = \sum_{i=0}^{+\infty} (\sqrt{2})^t |S_i|^t,$$

où on définit pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'ensemble $E_i := \{x : (x, f(x)) \in S_i\}$. D'après la formule (3.4) avec $h = (\sqrt{2})^{-1} |S_i|$ et $E = E_i$ (pour chaque $i \in \mathbb{N}$), il vient :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} |U_i|^t \geq \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\mathcal{L}^1(E_i)}{C_1} \geq C_1^{-1} > 0,$$

car $[0, 1] \subset \bigcup_{i=0}^{+\infty} E_i$, donc $\sum_{i=0}^{+\infty} \mathcal{L}^1(E_i) \geq \mathcal{L}^1([0, 1]) = 1$. Finalement, en passant à l'infimum sur tous les δ -recouvrements de Γ , il vient $\mathcal{H}_\delta^t(\Gamma) \geq C_1 > 0$. Et comme $\delta > 0$ est arbitraire, il vient donc $\mathcal{H}^t(\Gamma) \geq C_1 > 0$.

Ce résultat combiné au résultat de l'étape 1 montre ainsi que $\dim(\Gamma) = s$. □

Pour conclure ce chapitre, nous allons afficher le graphe Γ de la fonction f étudiée dans le théorème précédent pour différentes valeurs de s . Le résultat obtenu est cohérent avec le théorème !

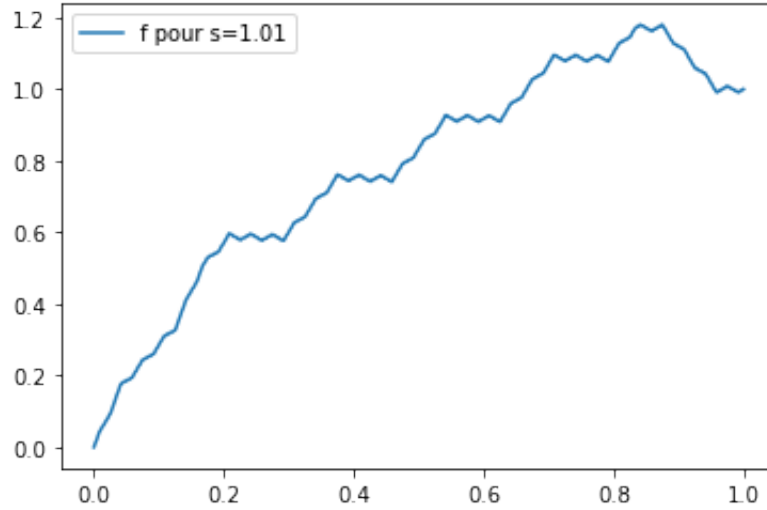


FIGURE 3.3 – Graphe de la fonction f pour $s = 1.01$.

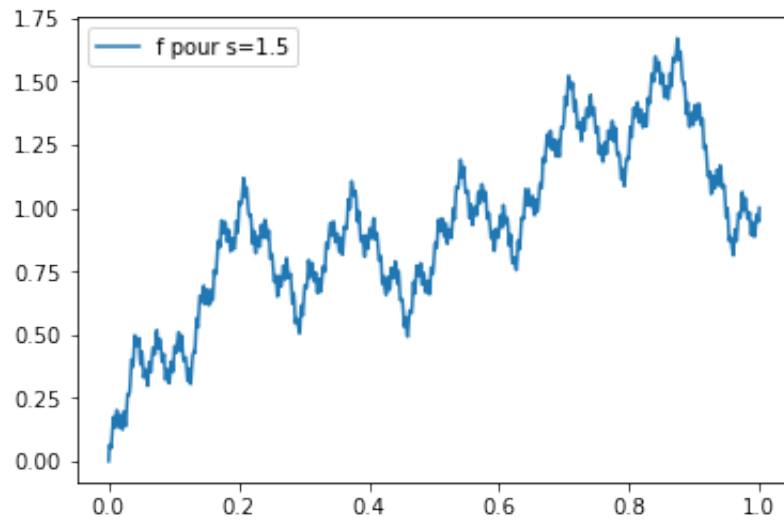


FIGURE 3.4 – Graphe de la fonction f pour $s = 1.5$.

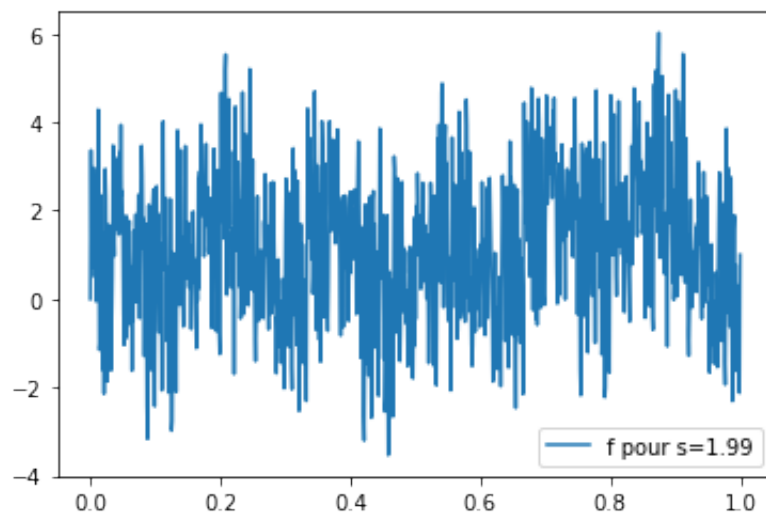


FIGURE 3.5 – Graphe de la fonction f pour $s = 1.99$.

Chapitre 4

Autour de la conjecture de Kakeya

Dans le présent chapitre nous allons nous attacher à décrire des ensembles intéressants à l'aide de la mesure de Hausdorff. Cela pouvant donner un aperçu du comportement de cet outil vis à vis d'une classe de parties de mesure extérieure de Lebesgue potentiellement petite, voire nulle.

L'histoire de ces ensembles est liée à deux mathématiciens principalement : le Russe Abram Besicovitch, et le Japonais Soichi Kakeya ; il n'est donc pas étonnant qu'ils aient laissé leurs noms à la plupart des objets qui vont être ici en jeu, cela même lorsqu'ils n'en sont pas vraiment à l'origine.

Tout commence en 1917 [8] avec une question de M. Kakeya : " A quel point peut-on minimiser l'aire balayée par une aiguille lors d'une rotation de 180° ? ". Mathématiquement le problème devient : "Quelle est la mesure de Lebesgue minimale possible pour une partie de \mathbb{R}^2 contenant un segment de longueur unité dans chaque direction ? ". La réponse sera apportée par Besicovitch en 1928 [8], cette aire peut être prise aussi petite que désirée, et même, nulle. Ici nous ne détaillerons pas la construction de tels ensembles, celle-ci étant détaillée en plusieurs endroits tels que [2] ou [8] où il est fait usage des arbres de Perron.

Depuis, le problème s'est considérablement généralisé, donnant lieu à de nouvelles questions. Désormais on ne se limite plus à des parties de \mathbb{R}^2 mais bien de \mathbb{R}^n , et plus à de "simples" segments, mais bien à des sous espaces vectoriels quelconques. En ce qui nous concerne, nous allons bien observer des parties de \mathbb{R}^n , mais nous allons nous contenter des segments unité.

Définition 4.1. (*Ensemble de Besicovitch*)

Nous appellerons Ensemble de Besicovitch de \mathbb{R}^n , toute partie de \mathbb{R}^n contenant un segment unité fermé dans chaque direction de \mathbb{S}^{n-1} .

Le contexte étant posé, nous allons nous intéresser à la conjecture suivante :

Conjecture 4.1. (*De Kakeya*)

Tout ensemble de Besicovitch de \mathbb{R}^n est de dimension de Hausdorff égale à n .

Remarque 4.1. Cette dernière a été démontrée comme vraie pour $n = 2$ en 1971, pour $n > 2$ elle reste non résolue à ce jour. Une résolution possible repose sur une préconjecture, la conjecture

de la fonction maximale de *Keakeya*, elle aussi démontrée pour $n = 2$ uniquement, et impliquant la conjecture de *Keakeya*.

Dans la suite nous nous proposons de démontrer quelques résultats élémentaires de la théorie des fonctions maximales, puis d'introduire la conjecture de la fonction maximale de *Keakeya*, démontrer qu'elle implique bien la conjecture de *Keakeya*, et finalement utiliser cette implication pour démontrer le cas $n = 2$.

4.1 Préliminaires sur les fonctions maximales

Dans cette section nous allons devoir passer par plusieurs résultats de recouvrement pour en arriver aux fonctions maximales. Nous nous plaçons dans $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ muni de la mesure de Lebesgue car il s'agit du cadre de la conjecture de *Keakeya*, mais nous faisons remarquer au lecteur que les résultats évoqués, ainsi que les raisonnements utilisés restent valables dans un espace métrique muni d'une mesure doublante.

Nous commençons par trois lemmes fidèles à l'intuition qui nous permettront d'aboutir à un théorème de recouvrement dit "5R".

Si B désigne une boule de \mathbb{R}^n (ouverte ou fermée), $r(B)$ désignera son rayon. Lorsqu'une collection de boules sera choisie, ses éléments seront supposés toutes ouvertes sans que l'on soit amené à le préciser, mais les résultats restent valables pour les boules fermées en passant d'inégalité stricte à large.

Lemme 4.1. *Soit \mathcal{B} une collection de boules deux à deux disjointes, de réunion bornée, et telle que $\inf_{B \in \mathcal{B}} r(B) > 0$. Alors \mathcal{B} est de cardinal fini.*

Démonstration. Supposons que \mathcal{B} soit un ensemble infini. On construit alors $(B_k)_{k \geq 0}$ une suite d'éléments de \mathcal{B} deux à deux distincts. Posons $(x_k)_{k \geq 0}$ la suite des centres de ces boules, indicées de même. Enfin notons $\delta := \inf_{B \in \mathcal{B}} r(B) > 0$.

Remarquons alors que l'on a $\|x_j - x_k\| \geq \delta$ dès que j est différent de k . En effet, dans le cas contraire on aurait $\|x_j - x_k\| \leq \delta \leq r(B_j)$ et donc $x_k \in B_j$ et ainsi $x_k \in B_j \cap B_k = \emptyset$. Cela étant, $(x_k)_{k \geq 0}$ ne peut admettre de valeur d'adhérence, ce qui contredit le théorème de Bolzano Weierstrass, cette suite étant bornée. \square

Lemme 4.2. *Soit \mathcal{B} une collection de boules, E une partie de \mathbb{R}^n , R un réel strictement positif. Supposons enfin que $\inf_{B \in \mathcal{B}} r(B) > 0$. Alors il existe $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ fini, constitué de boules deux à deux disjointes, disjointes de E , contenues dans $B(0, R)$, et qui soit maximale pour ces propriétés.*

Démonstration. Si $\mathcal{B} = \emptyset$, $\mathcal{B}' = \emptyset$ convient. Sinon on itère le processus suivant :

Tant qu'il reste dans \mathcal{B} un élément disjoint de E , disjoint des éléments de \mathcal{B}' , et inclus dans $B(0, R)$, on l'ajoute à \mathcal{B}' .

On construit ainsi un ensemble au plus dénombrable de boules, en effet lors du processus on peut associer chaque boule à un entier. Mais cet ensemble vérifie le lemme précédent, il est donc fini. La construction de \mathcal{B}' s'étant arrêtée par manque de candidat, \mathcal{B}' est maximale puisque sinon cela reviendrait à trouver un nouvel élément dans \mathcal{B} , disjoint de E et des éléments de \mathcal{B}' . \square

Lemme 4.3. *Soit \mathcal{B} une collection de boules, E une partie de \mathbb{R}^n , supposons que $\inf_{B \in \mathcal{B}} r(B) > 0$. Alors il existe $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ au plus dénombrable constitué de boules deux à deux disjointes, disjointes de E , et qui soit maximal pour ces propriétés.*

Démonstration. Si $\mathcal{B} = \emptyset$, $\mathcal{B}' = \emptyset$ convient. Sinon on procède par récurrence.

D'abord par le lemme précédent on construit $\mathcal{B}'_0 \subset \mathcal{B}$ famille finie maximale de boules deux à deux disjointes, disjointes de E , incluses dans $B(0, 1)$.

Si $\mathcal{B}_0, \dots, \mathcal{B}_k$ ont été construits, toujours par le lemme précédent, alors on construit $\mathcal{B}'_{k+1} \subset \mathcal{B}$ maximal, dont les éléments sont inclus dans $B(0, 2^{k+1})$, deux à deux disjointes et disjointes de l'ensemble $E \cup (\sqcup \mathcal{B}'_0) \cup \dots \cup (\sqcup \mathcal{B}'_k)$.

Les collections $(\mathcal{B}_k)_{k \geq 0}$ étant construites, on pose $\mathcal{B}' = \cup_{k \geq 0} \mathcal{B}'_k$. L'ensemble \mathcal{B}' est au plus dénombrable, ses éléments sont deux à deux disjointes, disjointes de E par construction. L'ensemble \mathcal{B}' est aussi maximale pour les propriétés citées car sinon on aurait $\mathcal{B}'' \subset \mathcal{B}$ tel que $\mathcal{B}' \subsetneq \mathcal{B}''$ où \mathcal{B}'' vérifie les propriétés voulues. On pourrait alors fixer $B \in \mathcal{B}'' \setminus \mathcal{B}'$, puis poser $k \in \mathbb{N}$ tel que $B \subset B(0, 2^k)$. Observons alors la collection $\mathcal{B}'_k \cup \{B\}$. Ses éléments sont inclus dans $B(0, 2^k)$, ne s'intersectent pas, n'intersectent pas E par définition de \mathcal{B}'_k et \mathcal{B}'' . Cela contredit la maximalité de \mathcal{B}'_k . \square

Passons maintenant au théorème de recouvrement. Si B est une boule, nous désignerons par $5B$ la boule de même centre que B telle que $r(5B) = 5r(B)$.

Théorème 4.1. (dit Vitali 5R)

Soit \mathcal{B} une famille de boules non dégénérées tel que $\sup_{B \in \mathcal{B}} r(B)$ est fini. Alors il existe $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ au plus dénombrable, constitué de boules deux à deux disjointes telle que :

$$\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subset \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} 5B.$$

Démonstration. Si $\mathcal{B} = \emptyset$, $\mathcal{B}' = \emptyset$ convient. Sinon posons $M := \sup_{B \in \mathcal{B}} r(B)$, ainsi $M \in]0, +\infty[$. On

peut alors écrire $\mathcal{B} = \cup_{k \geq 0} \mathcal{B}_k$ avec $\mathcal{B}_k = \left\{ B \in \mathcal{B} : r(B) \in \left] \frac{M}{2^{k+1}}, \frac{M}{2^k} \right] \right\}$.

A nouveau construisons par récurrence.

Par le dernier lemme, on construit $\mathcal{B}'_0 \subset \mathcal{B}_0$ au plus dénombrable, maximale, à éléments disjointes deux à deux.

Si $\mathcal{B}'_0, \dots, \mathcal{B}'_k$ sont construits, via le lemme précédent on construit $\mathcal{B}'_{k+1} \subset \mathcal{B}_{k+1}$ maximale, au plus dénombrable, à éléments deux à deux disjointes ainsi que disjointes des éléments de $\cup_{j=0}^k \mathcal{B}_j$, et donc aussi de $\cup_{j=0}^k \mathcal{B}'_j$.

On pose alors $\mathcal{B}' = \cup_{k \geq 0} \mathcal{B}'_k$, ce dernier est au plus dénombrable.

Les éléments de \mathcal{B}' sont deux à deux disjoints, en effet : soit B_1, B_2 éléments distincts de \mathcal{B}' , soit $j, l \in \mathbb{N}$ tel que $B_1 \in \mathcal{B}'_j$ et $B_2 \in \mathcal{B}'_l$. Si $j = l$, les éléments de $\mathcal{B}'_j = \mathcal{B}'_l$ sont disjoints deux à deux par définition, donc $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Si $j > l$, par définition les éléments de \mathcal{B}'_j sont disjoints de ceux de $\cup_{k=0}^{j-1} \mathcal{B}'_k$, et donc en particulier $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

Si $B \in \mathcal{B}'$, $B \subset 5B$ donc $B' := B$ convient. Si $B \notin \mathcal{B}'$, alors : $\forall k \in \mathbb{N}, B \notin \mathcal{B}'_k$. En particulier il existe k tel que $B \in \mathcal{B}_k$ et $B \notin \mathcal{B}'_k$. \mathcal{B}'_k étant maximale, on a que les éléments de $\mathcal{B}'_k \cup \{B\}$ ne sont pas deux à deux disjoints, ou bien que ces derniers ne sont pas disjoints de ceux de $\cup_{j=0}^{k-1} \mathcal{B}'_j$.

Ainsi : $\exists B' \in \cup_{j=0}^k \mathcal{B}'_j$ telle que $B \cap B' = \emptyset$.

En vue d'obtenir l'inclusion $B \subset 5B'$, commençons par comparer les rayons de ces boules. Soit $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$ tel que $B' \subset \mathcal{B}'_j \subset \mathcal{B}_j$. Alors $r(B') > \frac{M}{2^{j+1}} \geq \frac{1}{2} \frac{M}{2^k}$. Or $B \in \mathcal{B}_k$, donc $r(B) \leq \frac{M}{2^k}$, ainsi :

$$r(B') \geq \frac{1}{2} \frac{M}{2^k} \geq \frac{r(B)}{2}.$$

Passons finalement à l'inclusion : soit $x \in B$, b le centre de B , b' celui de B' , soit $y \in B \cap B'$, on a :

$$\|x - b'\| \leq \|x - b\| + \|b - y\| + \|y - b'\| \leq r(B) + r(B) + r(B') \leq 5r(B').$$

Donc $x \in 5B'$, d'où le résultat. \square

Ce théorème de recouvrement va s'avérer utile pour la prochaine démonstration. Ne tardons pas d'avantages et rentrons plus avant dans le sujet.

Pour $A \subset \mathbb{R}^n$ mesurable de mesure extérieure de Lebesgue $|A|$ et f une fonction de \mathbb{R}^n d'intégrale définie sur A , nous noterons désormais $\oint_A f(x)dx := \frac{1}{|A|} \int_A f(x)dx$.

Définition 4.2. Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ localement intégrable. La fonction :

$$\begin{aligned} Mf : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ x &\mapsto \sup_{r>0} \oint_{B(x,r)} |f|, \end{aligned}$$

est appelée fonction maximale de Hardy-Littlewood de f .

Les deux propriétés phares de l'opérateur M sont la continuité $L^1 - L^1_{faible}$, et la continuité $L^p - L^p$ pour $p > 1$. Nous commençons par la première, la seconde s'en déduira.

Suivant le contexte, le symbole $|\cdot|$ désignera des valeurs absolues ou la mesure extérieure de Lebesgue.

Théorème 4.2. (*Continuité $L^1 - L^1_{faible}$ de M*)

$$\exists c > 0, \forall f \in L^1(\mathbb{R}^n), \forall \lambda > 0, |\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}| \leq \frac{c}{\lambda} \|f\|_1.$$

Démonstration. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $\lambda > 0$.

Commençons par remarquer que pour tout x de \mathbb{R}^n on a :

$$\int_{B(x,r)} |f| \leq \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{\mathbb{R}^n} |f| = \frac{1}{|B(0,r)|} \int_{\mathbb{R}^n} |f| \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi on peut poser $R > 0$ tel que pour tout x de \mathbb{R}^n , tout $r \geq R$, $\int_{B(x,r)} |f| \leq \lambda$.

Posons $E := \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}$ et utilisons R pour estimer $|E|$. Par définition de Mf et de E , $\forall x \in E$, $\exists r_x > 0$, $\int_{B(x,r_x)} |f| > \lambda$. Mais donc par définition de R , $r_x \leq R$ pour tout x de E . On pose alors $\mathcal{B} := \{B(x, r_x) : x \in E\}$ recouvrement de E avec donc $\sup_{B \in \mathcal{B}} r(B) = \sup_{x \in E} r_x \leq R$. On a :

$$\forall B \in \mathcal{B}, \int_B |f| > \lambda. \quad (*)$$

Par théorème de recouvrement il existe $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ au plus dénombrable tel que $\cup_{B \in \mathcal{B}} B \subset \cup_{B \in \mathcal{B}'} 5B$. Finalement, puisque $E \subset \cup_{B \in \mathcal{B}} B \subset \cup_{B \in \mathcal{B}'} 5B$, on est conduit à l'estimation :

$$|E| \leq \left| \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} 5B \right| \leq \sum_{B \in \mathcal{B}'} |5B| = 5^n \sum_{B \in \mathcal{B}'} |B| \stackrel{(*)}{\leq} 5^n \sum_{B \in \mathcal{B}'} \frac{1}{\lambda} \int_B |f| \leq \frac{5^n}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f|,$$

la dernière inégalité venant du caractère disjoint des éléments de \mathcal{B}' .

Ainsi $|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}| \leq \frac{c}{\lambda} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$, avec $c = 5^n$. □

Remarque 4.2. Cette inégalité fait beaucoup penser à l'inégalité de Markov, mais ne nous y trompons pas, la démonstration de cette dernière demanderait à ce que Mf soit L^1 , ce qui n'est pas le cas en général.

De cette première inégalité nous déduisons la continuité $L^p - L^p$ de l'opérateur M pour $p > 1$.

Théorème 4.3. (Continuité $L^p - L^p$)

$$\forall p \in]1, +\infty[, \exists C_p > 0, \|Mf\|_p \leq C_p \|f\|_p.$$

La démonstration qui suit est inspirée de celle de [4].

Démonstration. Pour simplifier les notations, nous noterons dans cette démonstration, pour tout $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable :

$$\begin{aligned} \lambda_f : \quad]0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ t &\mapsto |\{x \in \Omega : |f(x)| > t\}|. \end{aligned}$$

Soit $p > 1$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Commençons par une majoration de λ_{Mf} , nous en déduirons le résultat voulu.

Soit $t > 0$, posons $g_t := \mathbf{1}_{\{|f|>t\}} f$ et $h_t := f - g_t$. Ainsi $f = g_t + h_t$. L'opérateur M est sous additif puisque la valeur absolue l'est, ainsi :

$$\begin{aligned}
\forall z > 0, \quad \{x \in \mathbb{R}^n : |Mf(x)| > z\} &= \{x \in \mathbb{R}^n : |M(g_t + h_t)(x)| > z\} \\
&\subset \{x \in \mathbb{R}^n : |Mg_t(x)| + |Mh_t(x)| > z\} \\
&\subset \{x \in \mathbb{R}^n : |Mg_t(x)| > z/2\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n : |Mh_t(x)| > z/2\}.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\forall z > 0, \quad \lambda_{Mf}(z) \leq \lambda_{Mh_t}(z/2) + \lambda_{Mg_t}(z/2) \quad (*)$$

Or $g_t \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $h_t \in L^{p+1}(\mathbb{R}^n)$, en effet :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g_t| = \int_{\{|f|>t\}} |f| \leq \left(\int_{\{|f|>t\}} 1^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\{|f|>t\}} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq |\{|f|>t\}|^{\frac{1}{p'}} \|f\|_p,$$

avec $\frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p}$ et $|\{|f|>t\}|$ fini car $\|f\|_p^p \geq \int_{\{|f|>t\}} |f|^p \geq t^p |\{|f|>t\}|$.

Et,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |h_t|^{p+1} = \int_{\{|f|\leq t\}} |f|^{p+1} = \int_{\{|f|\leq t\}} t^{p+1} \left(\frac{|f|}{t} \right)^{p+1} \leq \int_{\{|f|\leq t\}} t^{p+1} \left(\frac{|f|}{t} \right)^p \leq t \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p = t \|f\|_p^p.$$

De cet état de fait découle une majoration sur λ_{Mg_t} et une sur λ_{Mh_t} , on aura donc bien une majoration de λ_{Mf} via (*). La première est directe, pour la seconde nous tâcherons d'être astucieux.

La continuité $L^1 - L^1_{faible}$ s'applique à g_t , donc on a $c > 0$ indépendant de t et g_t tel que :

$$\forall z > 0, \quad \lambda_{Mg_t}(z) \leq \frac{c}{z} \|g_t\|_1.$$

Pour la seconde majoration nous n'allons pas appliquer directement ce même argument à h_t^{p+1} , remarquons plutôt que nous avons l'inclusion :

$$\{x \in \mathbb{R}^n : Mh_t(x) > z\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n : M(|h_t|^{p+1}) > z^{p+1}\},$$

pour tout $z > 0$. En effet, si $Mh_t(x) > z$, alors pour tout $r > 0$,

$$\int_{B(x,r)} |h_t| \leq |B(x,r)|^{-1} \left(\int_{B(x,r)} 1 \right)^{1-\frac{1}{p+1}} \left(\int_{B(x,r)} |h_t|^{p+1} \right)^{\frac{1}{p+1}} = \left(\int_{B(x,r)} |h_t|^{p+1} \right)^{\frac{1}{p+1}}.$$

Donc en passant à la puissance $p+1$ puis au supremum en r , on a $(Mh_t)^{p+1}(x) \leq M(|h_t|^{p+1})(x)$, donc $M(|h_t|^{p+1})(x) > z^{p+1}$.

On applique alors la croissance de la mesure de Lebesgue à cette inclusion puis finalement la continuité $L^1 - L^1_{faible}$ de h_t^{p+1} , il existe donc $b > 0$ tel que pour tout $z > 0$:

$$\lambda_{Mh_t}(z) = |\{x \in \mathbb{R}^n : Mh_t(x) > z\}| \leq |\{x \in \mathbb{R}^n : M(|h_t|^{p+1})(x) > z^{p+1}\}| \leq \frac{b}{z^{p+1}} \int_{\mathbb{R}^n} |h_t|^{p+1}.$$

Posons $d := b^{\frac{1}{p+1}}$ pour simplifier les écritures.

L'inégalité (*) ainsi que les deux dernières majoration permettent d'avoir, pour tout $z > 0$:

$$\lambda_{Mf}(z) \leq \frac{2c}{z} \|g_t\|_1 + \frac{(2d)^{p+1}}{z^{p+1}} \|h_t\|_{p+1}^{p+1}.$$

L'inégalité est en particulier vraie pour $z = t > 0$, mais t ayant été choisi arbitrairement, on a donc :

$$\forall t > 0, \quad \lambda_{Mf}(t) \leq \frac{2c}{t} \|g_t\|_1 + \frac{(2d)^{p+1}}{t^{p+1}} \|h_t\|_{p+1}^{p+1}.$$

d'où l'on va pouvoir déduire notre résultat en estimant $\|Mf\|_p^p$ comme suit :

$$\begin{aligned} \|Mf\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |Mf(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^n} p \int_0^{|Mf(x)|} t^{p-1} dt dx \\ &= p \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} t^{p-1} \mathbf{1}_{\{t < |Mf(x)|\}}(t, x) dt dx \\ &= p \int_0^{+\infty} t^{p-1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{\{|Mf(x)| > t\}}(t, x) dx \right) dt \\ &= p \int_0^{+\infty} t^{p-1} \lambda_{Mf}(t) dt \\ &\leq 2cp \int_0^{+\infty} t^{p-2} \|g_t\|_1 dt + 2^{p+1} d^{p+1} p \int_0^{+\infty} t^{-2} \|h_t\|_{p+1}^{p+1} dt. \end{aligned}$$

On calcule alors ces deux termes de sorte à faire apparaître $\|f\|_p^p$.

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} t^{p-2} \|g_t\|_1 dt &= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} t^{p-2} |f(x)| \mathbf{1}_{\{|f(x)| > t\}}(t, x) dx dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \int_0^{+\infty} t^{p-2} \mathbf{1}_{\{t < |f(x)|\}}(t, x) dt dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \int_0^{|f(x)|} t^{p-2} dt dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{p-1} |f(x)|^{p-1} |f(x)| dx \\ &= \frac{1}{p-1} \|f\|_p^p. \end{aligned}$$

Et de même :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} t^{-2} \|h_t\|_{p+1}^{p+1} dt &= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} t^2 |f(x)|^{p+1} \mathbf{1}_{\{|f(x)| \leq t\}}(t, x) dx dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p+1} \int_0^{+\infty} t^{-2} \mathbf{1}_{\{t \geq |f(x)|\}}(t, x) dt dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p+1} \int_{|f(x)|}^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p+1} \frac{1}{|f(x)|} dx \\ &= \|f\|_p^p. \end{aligned}$$

On a donc finalement l'égalité :

$$\|Mf\|_p^p \leq \left(2c \frac{p}{p-1} + 2^{p+1} d^{p+1} p \right) \|f\|_p^p,$$

telle que voulue. □

4.2 Conjecture de la fonction maximale de Keakeya

La fonction maximale de Keakeya d'une fonction de $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ fait penser aux fonctions maximales de Hardy-Littlewood en le fait qu'il s'agit d'une moyenne par l'intégrale volumique. Cependant, ici les moyennes ne plus prises sur des boules mais des cylindres, et l'on n'observe plus le supremum sur les tailles de boules centrées en un point voulu, mais le supremum sur tous les translatés d'un même cylindre dont l'orientation constitue le paramètre d'entrée de la fonction maximale de Keakeya.

Notation 4.1. Soit $v \in \mathbb{S}^{n-1}$, $\delta > 0$, $a \in \mathbb{R}^n$.

On note $T_v^\delta(a) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |\langle x - a, v \rangle| \leq \frac{1}{2}, \|(x - a)^{\perp v}\| \leq \delta \right\}$ le cylindre de direction v , hauteur 1, largeur δ .

Avec $x^{\perp v} = x - \langle x, v \rangle v$ le projeté orthogonal de x sur \mathbb{R}^{n-1} parallèlement à v .

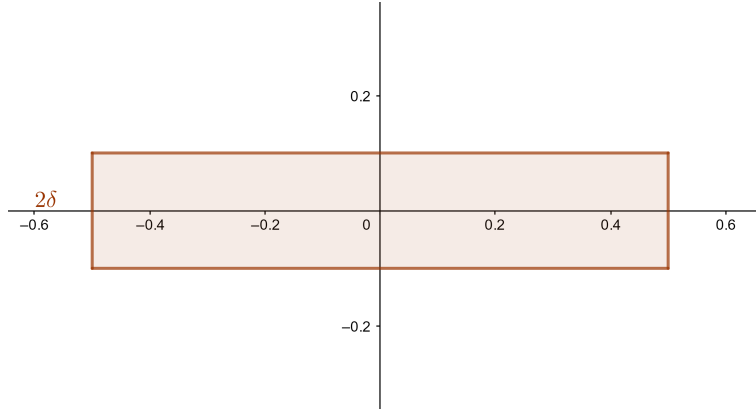


FIGURE 4.1 – $T_{(1,0)}^{0.1}(0)$ dans \mathbb{R}^2

Définition 4.3. Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ et $\delta > 0$. La fonction maximale de Keakeya de f pour δ est définie par :

$$\begin{aligned} f_\delta^* &: \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \int_{T_v^\delta(a)} |f(x)| dx. \end{aligned}$$

La conjecture naïve de la fonction de maximale de Keakeya s'énonce alors comme suit :

Conjecture 4.2.

$$\exists p > 1, \forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0, \forall f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n), \forall \delta > 0, \|f_\delta^*\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})} \leq \frac{C_\varepsilon}{\delta^\varepsilon} \|f\|_p.$$

Remarque 4.3. Nous parlons ici de conjecture naïve car un contre exemple permet d'exclure directement tous les réels $p < n$. Il s'agit de la fonction $f = \mathbf{1}_{B(0, \delta/2)}$.

Théorème 4.4. *La conjecture ci-dessus est fausse lorsque $p < n$.*

Démonstration. Soit $p \geq 1$. Nous noterons ω_k la mesure de Lebesgue k -dimensionnelle de la boule unité de \mathbb{R}^k , et α_k la mesure de $(k-1)$ -dimensionnelle de la sphère unité de \mathbb{R}^k .

La mesure des cylindres $T_v^\delta(a)$ ne dépend que de δ . Pour la déterminer on peut se contenter de celle de $T_{e_1}^\delta(0)$ où e_1 est un élément de la base canonique de \mathbb{R}^n . Il s'agit d'intégrer la mesure des sections du cylindre sur sa hauteur, c'est à dire ici de $\left(-\frac{1}{2}, 0, \dots, 0\right)$ à $\left(\frac{1}{2}, 0, \dots, 0\right)$. Ces sections sont toutes des translations du projeté orthogonal du cylindre sur $\text{Vect}(e_2, \dots, e_n)$ parallèlement à e_1 . Le projeté étant défini comme l'ensemble des points x tels que $\|x\| \leq \delta$ à savoir la boule de \mathbb{R}^{n-1} de centre 0 et de rayon δ ayant donc pour mesure $\delta^{n-1}\omega_{n-1}$. Ainsi :

$$|T_v^\delta(a)| = |T_{e_1}^\delta(0)| = \int_{-1/2}^{1/2} \delta^{n-1}\omega_{n-1} = \delta^{n-1}\omega_{n-1}.$$

Ce prélude notationnel et calculatoire terminé, revenons en à la contradiction de notre inégalité.

Soit $\delta > 0$ assez petit, disons $\delta \leq 1$. Posons $f = \mathbf{1}_{B(0, \delta/2)}$. Alors on a l'inclusion $B(0, \delta/2) \subset T_v^\delta(0)$ pour tout $v \in \mathbb{S}^{n-1}$. En effet, si $x \in B(0, \delta/2)$ on a :

$$|\langle x, v \rangle| \leq \|x\| \|v\| \leq \frac{\delta}{2} \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \|x^\perp\| = \|x - \langle x, v \rangle v\| \leq \|x\| + \|x\| \|v\|^2 \leq \delta.$$

Par conséquent, pour tout $v \in \mathbb{S}^{n-1}$, on a :

$$\begin{aligned} f_\delta^*(v) &= \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \int_{T_v^\delta(a)} \mathbf{1}_{B(0, \delta/2)}(x) dx \\ &\geq \frac{|B(0, \frac{\delta}{2}) \cap T_v^\delta(0)|}{|T_v^\delta(0)|} \\ &= \frac{|B(0, \frac{\delta}{2})|}{|T_v^\delta(0)|} \\ &= \frac{(\delta/2)^n \omega_n}{\delta^{n-1} \omega_{n-1}} \\ &= \frac{1}{2^n} \frac{\omega_n}{\omega_{n-1}} \delta. \end{aligned}$$

Et donc :

$$\|f_\delta^*\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})} \geq \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\frac{1}{2^n} \frac{\omega_n}{\omega_{n-1}} \delta \right)^p d\sigma(v) \right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{2^n} \frac{\omega_n}{\omega_{n-1}} \delta \alpha_n^{\frac{1}{p}}.$$

D'autre part :

$$\|f\|_p = \left| B\left(0, \frac{\delta}{2}\right) \right|^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{\delta^n}{2^n} \right)^{\frac{1}{p}} \omega_n^{\frac{1}{p}}.$$

La conjecture impliquerait donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \frac{1}{2^n} \frac{\omega_n}{\omega_{n-1}} \delta \leq \frac{C_\varepsilon}{\delta^\varepsilon} \left(\frac{\delta^n}{2^n} \omega_n \right)^{\frac{1}{p}}.$$

C'est à dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \delta^{1+\varepsilon-\frac{n}{p}} \leq 2^{n(1-\frac{1}{p})} C_\varepsilon \omega_{n-1} \omega_n^{\frac{1}{p}-1}.$$

Ce qui est exclu dès lors que $1 + \varepsilon - \frac{n}{p} < 0$, c'est à dire $p < \frac{n}{1+\varepsilon}$.

Le réel ε étant arbitraire, la conjecture est donc impossible pour $p < n$. \square

Ceci étant, cela nous amène à la conjecture de la fonction maximale de Kakeya telle qu'elle est posée généralement.

Conjecture 4.3. *Fonction maximale de Kakeya*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0, \forall f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n), \forall \delta > 0, \|f_\delta^*\|_{L^n(\mathbb{S}^{n-1})} \leq \frac{C_\varepsilon}{\delta^\varepsilon} \|f\|_n.$$

4.3 Lien avec la conjecture de Kakeya

Sans plus attendre nous allons démontrer que la conjecture de la fonction maximale de Kakeya, même dans sa forme naïve, entraîne la conjecture de Kakeya.

Théorème 4.5. *Si pour tout $\varepsilon > 0$, on a $C_\varepsilon > 0$ tel que $\forall f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n), \forall \delta > 0$,*

$$\|f_\delta^*\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})} \leq \frac{C_\varepsilon}{\delta^\varepsilon} \|f\|_p,$$

alors tout ensemble de Besicovitch de \mathbb{R}^n est de dimension de Hausdorff égale à n .

Démonstration. Soit E un ensemble de Besicovitch. Soit $s < n$, montrons que $\mathcal{H}^s(E) = \sup_{d>0} \mathcal{H}^s_d(E) \neq$

0. Fixons donc $d > 0$ assez petit, par exemple $d < \frac{1}{2}$. Soit enfin $\cup_{j \in \mathbb{N}} B_j$ un d -recouvrement de E que l'on peut supposer constitué de boules ouvertes d'après proposition 1.1. Pour $j \in \mathbb{N}$, $B_j = B(x_j, r_j)$ avec $r_j < \frac{d}{2}$.

L'objectif étant de trouver une constante $c > 0$, indépendante du d -recouvrement, telle que $\sum_{j \in \mathbb{N}} r_j^s \geq c$.

Pour ce faire commençons par regrouper les boules par rayons similaires, on pose pour tout $k \in \mathbb{N}^* : J_k = \left\{ j \in \mathbb{N} : r_j \in \left[\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k-1}} \right] \right\}$, ainsi que $G_k = \cup_{j \in J_k} B_j$.

Pour $v \in \mathbb{S}^{n-1}$, E contient au moins un segment unité de direction v , notons I_v un tel segment. On peut alors opérer un tri des directions v suivant le groupement de boules rencontrant I_v . En

effet, on pose pour $k \in \mathbb{N}^*$: $S_k := \left\{ v \in \mathbb{S}^{n-1} : |I_v \cap G_k| \geq \frac{d}{k^2} \right\}$, où $|\cdot|$ désigne la mesure extérieure de Lebesgue 1-dimensionnelle sur la droite I_v .

On a bien l'égalité $\cup_{k \in \mathbb{N}^*} S_k = \mathbb{S}^{n-1}$, puisque sinon, ayant l'égalité :

$$1 = |I_v| \leq |\cup_{k \in \mathbb{N}^*} (I_v \cap G_k)| \leq \sum_{k \in \mathbb{N}^*} |I_v \cap G_k|,$$

l'existence d'un v dans $\mathbb{S}^{n-1} \setminus \cup_{k \in \mathbb{N}^*} S_k$ entraînerait $|I_v \cap G_k| < \frac{d}{k^2}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, et donc

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^*} |I_v \cap G_k| \leq \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{d}{k^2}; \text{ ce qui impliquerait :}$$

$$1 \leq \sum_{k \in \mathbb{N}^*} |I_v \cap G_k| \leq \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{d}{k^2} \leq \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{6} < 1.$$

Fixons $v \in \mathbb{S}^{n-1}$. On peut donc poser k tel que $v \in S_k$. Posons aussi $f = \mathbf{1}_{F_k}$ où $F_k = \cup_{j \in J_k} B(x_j, 10r_j)$. Nous allons tâcher de minorer $f_{2^{-k}}^*$, et d'utiliser la conjecture de la fonction maximale de Kakeya afin d'obtenir la minoration de $\sum_{j \in \mathbb{N}} r_j^s$ telle que désirée. Notons a_v le milieu de I_v .

Il va s'agir d'abord de minorer $|T_v^{2^{-k}}(a_v) \cap F_k|$, pour ce faire nous allons intégrer $\mathbf{1}_{F_k}$ suivant toutes les hauteurs du cylindre, ces dernières n'étant autres que les translatés de I_v par un vecteur orthogonal à I_v , de norme inférieure à 2^{-k} . Il nous faut donc étudier ces translations : posons z_0 un tel vecteur de translation et $G'_k := z_0 + G_k$, $I'_v := z_0 + I_v$. Ci-dessous, la situation est représentée pour $n = 3$.

En fait la translation est suffisamment petite et F_k suffisamment épais pour que l'on ait $G'_k \subset F_k$. En effet, si $x \in G'_k$, alors $x = y + z_0$ avec $y \in G_k$. Ainsi il existe j tel que $\|y - x_j\| \leq r_j$ et donc :

$$\|x - x_j\| \leq \|y - x_j\| + \|z_0\| \leq r_j + \frac{1}{2^k} \leq r_j + r_j \leq 10r_j.$$

Puisque $v \in S_k$, cette inclusion entraîne :

$$\frac{d}{k^2} \leq |I_v \cap G_k| \leq |(I_v \cap G_k) + z_0| \leq |I'_v \cap G'_k| \leq |I'_v \cap F_k|.$$

On a donc une minoration de $|I'_v \cap F_k|$ indépendante de la translation. L'intégrale telle que voulue va donc nous apporter une minoration de $|T_v^{2^{-k}}(a_v) \cap F_k|$. Calculons en effet :

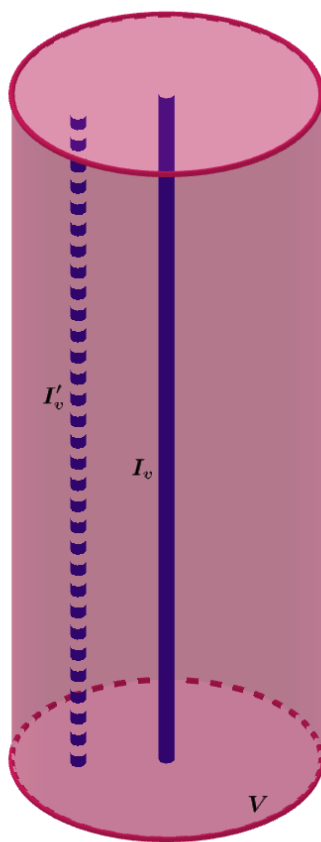


FIGURE 4.2 – $T_v^{2^{-k}}(a_v)$ avec $n = 3$

$$\begin{aligned}
|T_v^{2^{-k}}(a_v) \cap F_k| &= \int_{T_v^{2^{-k}}(a_v)} \mathbf{1}_{F_k}(x) dx \\
&= \int_{B_{\mathbb{R}^{n-1}}(0, \frac{1}{2^k})} \int_{I_v + z_0} \mathbf{1}_{F_k}(t) dt dz_0 \\
&= \int_{B_{\mathbb{R}^{n-1}}(0, \frac{1}{2^k})} |(I_v + z_0) \cap F_k| dz_0 \\
&\geq \frac{d}{k^2} \left| B_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(0, \frac{1}{2^k} \right) \right| \\
&= \frac{d}{k^2} \left(\frac{1}{2^k} \right)^{n-1} \omega_{n-1} \\
&= \frac{d}{k^2} |T_v^{2^{-k}}(a_v)|,
\end{aligned}$$

où le domaine d'intégration $B_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(0, \frac{1}{2^k} \right)$ est inclus dans un plan de dimension $n - 1$ orthogonal à v .

On peut donc directement passer à la minoration de $f_{2^{-k}}^*$, avec toujours $v \in S_k$ tel que fixé, on a :

$$f_{2^{-k}}^*(v) = \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \int_{T_v^{2^{-k}}(a_v)} \mathbf{1}_{F_k}(x) dx \geq \frac{|T_v^{2^{-k}}(a_v) \cap F_k|}{|T_v^{2^{-k}}(a_v)|} \geq \frac{d}{k^2}.$$

Donc :

$$\|f_{2^{-k}}^*\|_p \geq \left(\int_{S_k} \left(\frac{d}{k^2} \right)^p dv \right)^{\frac{1}{p}} = \frac{d}{k^2} |S_k|^{\frac{1}{p}}.$$

Or la conjecture de la fonction maximale de Kakeya donne :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0, \|f_{2^{-k}}\|_p \leq C_\varepsilon 2^{k\varepsilon} \|\mathbf{1}_{F_k}\|_p.$$

Donc on a, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé :

$$\frac{d}{k^2} |S_k|^{\frac{1}{p}} \leq C_\varepsilon 2^{k\varepsilon} |F_k|^{\frac{1}{p}}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
|S_k| &\leq C_\varepsilon \frac{k^{2p}}{d^p} 2^{pk\varepsilon} |F_k| \\
&\leq C_\varepsilon^p \frac{k^{2p}}{d^p} 2^{pk\varepsilon} \sum_{j \in J_k} 10^n r_j^n \omega_n \\
&< C_\varepsilon^p \frac{k^{2p}}{d^p} 2^{pk\varepsilon} 10^n \frac{1}{2^{n(k-1)}} \omega_n |J_k| \\
&= C_\varepsilon^p \left(\frac{10^n \omega_n}{d^p} \right) k^{2p} 2^{kp\varepsilon - n(k-1)} |J_k|.
\end{aligned}$$

Posons $C(p, n, d) := \frac{10^n \omega_n}{d^p}$.

Remarquons que :

$$\frac{k^{2p} 2^{kp\varepsilon - (k-1)n}}{2^{-k(n-2p\varepsilon)}} = \frac{k^{2p} 2^{kp\varepsilon + n}}{2^{2kp\varepsilon}} = 2^n \frac{k^{2p}}{2^{kp\varepsilon}},$$

est borné en k . Donc on a $M(n, p, \varepsilon)$ tel que $k^{2p} 2^{kp\varepsilon - (k-1)n} \leq M(n, p, \varepsilon) 2^{-k(n-2p\varepsilon)}$. Posons $\tilde{C}(n, p, \varepsilon, d) = C_\varepsilon^p C(p, n, d) M(n, p, \varepsilon)$, alors :

$$|S_k| \leq \tilde{C}(n, p, \varepsilon, d) 2^{-k(n-2p\varepsilon)} |J_k|,$$

pour tous les k tels que $S_k \neq \emptyset$ puisque $\mathbb{S}^{n-1} = \cup_{k \in \mathbb{N}^*} S_k$. L'inégalité est triviale lorsque $S_k = \emptyset$, on a donc cette inégalité pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

On peut donc finalement en venir à la minoration de la somme des rayons à l'exposant s , pour cela prenons $\varepsilon < \frac{n-s}{2p}$, de sorte que $s < n - 2p\varepsilon$, puisque les rayons sont strictement plus petits que 1, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{N}} r_j^s &\geq \sum_{j \in \mathbb{N}} r_j^{n-2p\varepsilon} \\ &\geq \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \sum_{j \in J_k} r_j^{n-2p\varepsilon} \\ &\geq \sum_{k \in \mathbb{N}^*} 2^{-k(n-2p\varepsilon)} |J_k| \\ &\geq \tilde{C}(n, p, \varepsilon, d)^{-1} \sum_{k \in \mathbb{N}^*} |S_k| \\ &\geq \tilde{C}(n, p, \varepsilon, d)^{-1} |\mathbb{S}^{n-1}| > 0. \end{aligned}$$

On pose alors $C := \tilde{C}(n, p, \varepsilon, d)^{-1} |\mathbb{S}^{n-1}|$ indépendant du d – *recouvrement*.

On a bien $\sum_{j \in \mathbb{N}} r_j^s \geq C > 0$.

□

4.4 Résolution dans le cas $n = 2$

A présent nous allons démontrer la conjecture de la fonction maximale deakeya dans le cas $n = 2$. En fait, pour être exact, nous allons donner une majoration un peu plus forte valable pour $\delta \leq 1$, la démonstration précédente sera donc toujours valable. Nous aurons ainsi démontré la conjecture deakeya dans le cas $n = 2$.

Théorème 4.6.

$$\exists C > 0, \forall f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n), \forall \delta > 0, \|f_\delta^*\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})} \leq C \sqrt{\log(1/\delta)} \|f\|_2.$$

Remarque 4.4. Pour tout $\varepsilon > 0$, $\delta^\varepsilon \sqrt{\log\left(\frac{1}{\delta}\right)} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$. Donc pour $\delta \leq 1$, $\exists C_\varepsilon > 0$, $\delta^\varepsilon \sqrt{\log\left(\frac{1}{\delta}\right)} \leq C_\varepsilon$. Cette dernière inégalité implique bien celle désirée.

Démonstration. Commençons par construire une fonction $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui nous sera bien utile. Soit $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ d'intégrale sur \mathbb{R} égale à 2. On pose alors $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ sa transformée de Fourier inverse. Ainsi on a :

$$u(0) = \widehat{\widehat{u}}(0) = \widehat{v}(0) = \int_{\mathbb{R}} v = 2.$$

On choisit alors $\lambda > 0$ tel que la fonction $u\left(\frac{\cdot}{\lambda}\right)$ soit supérieure à 1 sur $[-1, 1]$. On pose alors $\phi := \left(u\left(\frac{\cdot}{\lambda}\right)\right)^2$.

Ainsi $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, est une fonction positive, plus grande que 1 sur $[-1, 1]$, et sa transformée de Fourier est à support compact puisque :

$$\widehat{\phi} = \left(\widehat{u\left(\frac{\cdot}{\lambda}\right)}\right)^2 = \widehat{u\left(\frac{\cdot}{\lambda}\right)} * \widehat{u\left(\frac{\cdot}{\lambda}\right)} = \lambda^2 (\widehat{u}(\lambda \cdot))^2 = \lambda^2 v^2(\lambda \cdot) \in C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

Passons à présent à la démonstration à proprement parler, posons $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\psi(x_1, x_2) = \frac{\phi(x_1)\phi(\frac{x_2}{\delta})}{\delta}$. On pose aussi $\rho_\delta^v : x \mapsto \frac{1}{2\delta} \mathbf{1}_{T_v^\delta(0)}(x)$, de sorte que :

$$f_\delta^*(v) = \sup_{a \in \mathbb{R}^2} (\rho_\delta^v * f)(a).$$

En observant les deux cas $x \in T_v^\delta(0)$ et $x \notin T_v^\delta(0)$ séparément, on a $\rho_\delta^{e_1} \leq \psi$, avec e_1 le premier vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^2 . On en déduit $f_\delta^*(e_1) \leq \sup_{a \in \mathbb{R}^2} (\psi * f)(a)$. Ainsi, si pour $v \in \mathbb{S}^1$ on note P_v l'application linéaire envoyant v sur e_1 , et que l'on note $\psi_v := \psi \circ P_v$, on a donc :

$$f_\delta^*(v) \leq \sup_{a \in \mathbb{R}^2} (\psi_v * f)(a).$$

On a alors les inégalités suivantes :

$$f_\delta^*(v) \leq \|\psi_v * f\|_\infty = C' \left\| \widehat{\psi_v \hat{f}} \right\|_\infty = C' \left\| \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ix\xi} \hat{\psi}_v(x) \hat{f}(x) dx \right\|_\infty \leq C' \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{\psi}_v(x)| |\hat{f}(x)| dx,$$

où C' dépend de la normalisation choisie pour la transformée de Fourier. Or par l'inégalité de Cauchy Schwarz on a :

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\hat{\psi}_v(x)| |\hat{f}(x)| dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\hat{\psi}_v(x)| |\hat{f}(x)|^2 (1 + \|x\|) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\hat{\psi}_v(x)|}{1 + \|x\|} dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Un calcul explicite donne $\hat{\psi}(x_1, x_2) = \hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(\delta x_2)$. Puisque la transformée de Fourier est une opération linéaire, on a aussi $\hat{\psi}_v = \hat{\psi} \circ P_v$. Par conséquent, $\hat{\phi}$ étant bornée, on voit que $\hat{\psi}_v$ est bornée indépendamment de v , notons en M un majorant.

Notons aussi $[-\eta, \eta]$ un segment contenant le support de $\hat{\phi}$. Par le calcul explicite de $\hat{\psi}$, on peut avoir une idée de son support.

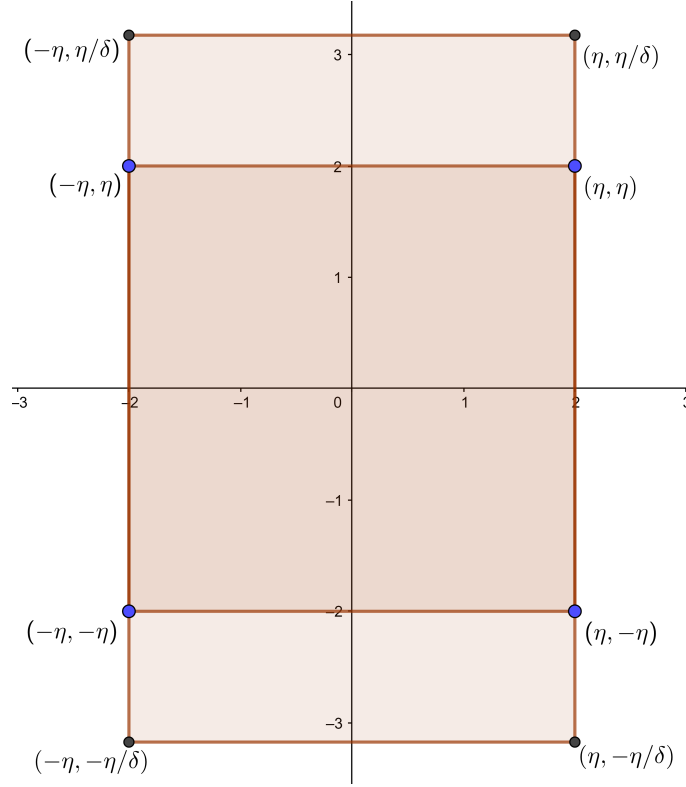


FIGURE 4.3 – Support de ψ_v avec $v = e_1$

Sur ce dessin on a divisé le support en 3 parties, parties qui vont être celles intervenant dans la majoration de $\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\hat{\psi}_v(x)}{1 + \|x\|} dx \leq M \int_R \frac{1}{1 + \|x\|} dx$, où R désigne le support de $\hat{\psi}_v$. Or la fonction $x \mapsto \frac{1}{1 + \|x\|}$ ne dépend que de la distance euclidienne de x à l'origine. Le support de $\hat{\psi}_v$ n'étant alors qu'une rotation de celui de $\hat{\psi}_{e_1}$, on peut supposer $v = e_1$, la majoration obtenue restera

valable pour tout $v \in \mathbb{S}^1$. On calcule,

$$\begin{aligned}
\int_R \frac{1}{1 + \|x\|} dx &= \int_{[-\eta, \eta]^2} \frac{1}{1 + \|x\|} dx + \int_{R \setminus [-\eta, \eta]^2} \frac{1}{1 + \|x\|} dx \\
&\leq |[-\eta, \eta]^2| + 2 \int_{-\eta}^{\eta} \int_{\eta}^{\eta/\delta} \frac{1}{1 + \|x\|} dx_2 dx_1 \\
&\leq 4\eta^2 + 2 \int_{-\eta}^{\eta} \int_{\eta}^{\eta/\delta} \frac{1}{1 + |x_2|} dx_2 dx_1 \\
&\leq 4\eta^2 + 4\eta \int_{\eta}^{\eta/\delta} \frac{1}{x_2} dx_2 \\
&= 4\eta^2 + 4\eta \log \left(\frac{1}{\delta} \right).
\end{aligned}$$

On peut donc poser C , indépendamment de v , tel que :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\hat{\psi}_v(x)}{1 + \|x\|} dx \leq M \int_R \frac{1}{1 + \|x\|} dx \leq 4M\eta^2 + 4M\eta \log \left(\frac{1}{\delta} \right) C \log \left(\frac{1}{\delta} \right).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\|f_\delta^*\|^2 &= \int_{\mathbb{S}^1} |f_\delta^*(v)|^2 dv \\
&\leq \int_{\mathbb{S}^1} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\hat{\psi}_v(x)| |\hat{f}(x)|^2 (1 + \|x\|) dx \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\hat{\psi}_v(x)}{1 + \|x\|} dx \right) dv \\
&\leq C \log \left(\frac{1}{\delta} \right) \int_{\mathbb{S}^1} \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{\psi}_v(x)| |\hat{f}(x)|^2 (1 + \|x\|) dx dv \\
&\leq C \log \left(\frac{1}{\delta} \right) \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{f}(x)|^2 (1 + \|x\|) \left(\int_{\mathbb{S}^1} \|\hat{\psi}_v(x)\| dv \right) dx \\
&\leq C \log \left(\frac{1}{\delta} \right) \|\hat{f}\|_2^2 \\
&= C \log \left(\frac{1}{\delta} \right) \|f\|_2^2.
\end{aligned}$$

La dernière égalité étant obtenue par théorème de Plancherel.

Nous avons donc démontré la *Conjecture de la fonction maximale de Keakeya* dans le cas $n = 2$, on a donc bien la *Conjecture de Keakeya* dans le cas $n = 2$. \square

Bibliographie

- [1] A. Besicovitch-Ursell. *Sets of fractional dimension (V) : On dimensional numbers of some continuous curves.*
- [2] K. Falconer. *The geometry of fractal sets.* Cambridge University Press, 1986.
- [3] B. Jean. *Besicovitch type maximal operators and applications to fourier analysis.*
- [4] W. Michel. *Analyse harmonique réelle.*
- [5] L. Moonens. Autour (et loin) de la notion de courbe.
- [6] L. Moonens. Le théorème de dérivation de lebesgue.
- [7] L. Moonens. Le théorème de recouvrement de vitali "5r".
- [8] H. Pajot. Autour du problème deakeya.
- [9] D. Pascal. Introduction à la géométrie.
- [10] H. W. Thomas. *Lecture on Harmonic Analysis.*
- [11] S. Weixiao. Hausdorff dimension of the graphs of the classical Weierstrass functions.